
MARTIN
LES SIGNES NUMÉRAUX
VITTORIO EM. III


FONDO PROVINCIA


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine
21423



LES SIGNES NUMÉRAUX
ET
L'ARITHMÉTIQUE
CHEZ LES PEUPLES DE L'ANTIQUITÉ
ET DU MOYEN-ÂGE



EXTRAIT DU TOME V. N.os V. ET VI

DES *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA*

LES SIGNES NUMÉRAUX

ET

L'ARITHMÉTIQUE

CHEZ LES PEUPLES DE L'ANTIQUITÉ

ET DU MOYEN-ÂGE

EXAMEN

De l'ouvrage allemand intitulé :

Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker

von Dr. MORITZ CANTOR (Halle, 1863, in-8.)

PAR

TH. HENRI MARTIN

DOYEN DE LA FACULTÉ DES LETTRES DE RENNES,
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE ET DE L'ACADÉMIE
DES SCIENCES DE BERLIN.



ROME

IMPRIMERIE DE PROPAGANDA FIDE

1864

TABLE DES CHAPITRES

Introduction		page	2
Chapitre I.	Les Egyptiens	»	5
» II.	Les Babyloniens	»	8
» III.	Les Chinois.	»	11
» IV.	Les Indiens	»	13
» V.	La Vie de Pythagore	»	19
» VI.	La Géométrie de Pythagore.	»	22
» VII.	L'Arithmétique de Pythagore	»	24
» VIII.	Les signes numéraux des Grecs	»	29
» IX.	L'Abacus	»	31
» X.	L'Abacus (*suite*).	»	33
» XI.	Signes numéraux des Romains	»	38
» XII.	Mathématiciens Romains	»	42
» XIII.	Œuvres de Boèce	»	48
» XIV.	Le Manuscrit E. Multiplication	»	49
» XV.	Le Manuscrit E. Division, Fractions	»	51
» XVI.	Signes Pythagoriques	»	57
» XVII.	Signes numéraux des Arabes	»	65
» XVIII.	Art du calcul chez les Arabes	»	72
» XIX.	Isidore, Bède, Alcuin.	»	75
» XX.	Odon de Cluny	»	78
» XXI.	Vie de Gerbert	»	82
» XXII.	Connaissances mathématiques de Gerbert	»	84
» XXIII.	Les abacistes et les algoritmiciens	»	88
» XXIV.	Léonard de Pise.	»	90
Considérations finales		»	93

ERRATA

Page	Ligne	au lieu de :	lisez :
2	2 des notes	*desen*	*deren*
3	1	des quelques	de quelques
3	2 des notes	*conservées*	*conservés*
3	5 des notes	*Vrsprang und die Werwandschaft*	*Ursprung und die Verwandschaft*
4	26	ne son pas	ne sont pas
5	avant-dernière ligne	Beni-Gassan	Beni-Hassan
6	11	les indigènes	les rois indigènes
6	5 des notes	détournait	détournerait
6	10 des notes	le fait	la fait
7	9	multiplicateur	multiplicateurs
8	dernière	*scytique*	*scythique*
8	derniere des notes	scytiques	*scythiques*
9	1	conéiformes	cunéiformes
10	8	πεμπάζειν	πεμπάζειν
11	1	armonique	harmonique
11	6	Vazquez	Vasquez
12	4 des notes	Visdelov	Visdelou
13	25	il y a laissé	il a laissé
13	31	que *Sourya-Siddhânta*	que le *Sourya-Siddhanta*
13	2 des notes	*illustratis*	*illustrates*
13	7 des notes	du *siddhânta Siromani*	du *Goladhyaya* du *Siddhanta-Siromani*
14	37	étranger	étrangers
14	4 des notes	verschieden	verschiedenen
14	4 des notes	*Vrsprung*	*Ursprung*
13	3	n'appartenaient au	n'appartenaient pas au
15	14	parce qu'il a	parce qu' il y a
13	19—20	multiplicateur	multiplicateurs
13	6	Brockaus	Brockhaus
15	12—13 des notes	*Dhauli in luttak*	*Dhauli in Cuttak*
16	14 des notes	*Useful* tables	*Useful Tables*
18	2	deux quatre	deux des quatre
18	39	un valeur	une valeur
19	18	*Sourya-Siddhânta*	le *Sourya-Siddhânta*
20	10	Chassany	Chassang
20	7 des notes	Chassany	Chassang
20	8 des notes	*Geschicte*	*Geschichte*
21	13	Thalé	Thulé
21	deux dernières lignes	qu'une éclipse de soleil phénomène	qu'une éclipse de soleil est un phénomene
22	3 des notes	pentagone étoile	pentagone en étoile
22	3 des notes	ci-prés	ci-apres
23	21	était	ait été
24	16	des considérations	de considérations
24	31	dont j'indiquerai	et dont j'indiquerai
24	35	art de calculs	art des calculs
25	28	Tarante	Tarente
26	1 des notes	*unde*	*und*
27	35	misure	mesure
29	1	par 1 sur	par 1 et sur
29	4 des notes	Bœch	Bœckh
30	21	le vrai zéro, par son usage	le vrai zéro, attaché par son usage
30	22	ils la marquent	ils marquent
30	10 des notes	μυρίαδες	μυριάδες
31	10	et toujours	est toujours
33	9	der rainures	des rainures
34	14	βαίνο	βαίνω
34	22	*sens support*	*sans support*
34	3 et 4 des notes	*Ethymologicum*	*Etymologicum*
33	15	des Boèce	de Boèce

Page	Ligne	au lieu de	lisez :
35	1 des notes	*μεσσεί*	*πισσεί*
26	14	nombres	nombrer
26	16	(1000)	(10000)
36	avant-dernière	offraient	effraient
27	28	entiers suivant	entiers. Suivant
38	9—10	n'emploient par	n'emploient pas
28	15	davant	devant
38	21	qui y étaient	qui étaient
41	22	2400	24000
41	22	argentorum	argenteorum
42	dernière	romians	romains
43	15	Tarante	Tarente
43	18	Tarante	Tarente
44	28	*ut claruit arithmeticæ*	*ut claruit*, arithmeticæ
45	1	je l'avait	je l'avais
45	41	*la traduire*	*les traduire*
46	22	Taraute	Tarente
46	2 des notes	nn patrice	au patrice
48	13—14	que réciproquement la première partie du premier livre reconnue authentique	que réciproquement la premiere partie du premier livre se réfere à la seconde. Pourtant j'avais signalé 2?), vers la fin de cette première partie, reconnue authentique
49	5	rejeunit	rajeunit
49	6	reconte	raconte
49	2 des notes	*Sur les rapport*	*Sur le rapport*
50	16	à peu	à peu près
50	26	sortout	surtout
51	22	donne *premier quotient*	donne pour *premier quotient*
52	24	lesques	lesquelles
54	29	noms destinées à rappresenter	noms destinés à représenter
54	avant dernière	le sixième du pied	le dixième du pied
54	2 des notes	Boun	Bonn
54	5 des notes	*De figures*	*De figuris*
55	4	l'*as* prise	l'*as* pris
55	2 des notes	*Geomatici*	*Gromatici*
56	17	le mot les plus	le mot le plus
56	21	peut-être	peut être
56	1 des notes	*Pythagorees*	*Pithagoreer*
57	11	que *logistique*	que la *logistique*
56	4	les dixième	le dixieme
58	10	les titres de	les titres des
58	21	le deux manuscrits	les deux manuscrits
59	4 des notes	concernant	concernent
60	9 des notes	*Des notions*	*Des notations*
60	9 des notes	*porte de la nature*	*porte-clé de la nature*
62	6 des notes	χαλότης Zenis de Ζηνες	χαλέτης, Zenis de Ζηνὶς
62	20	ψῆφους	ψῆφος.
64	13	entrefaits	entrefaites
65	5 des notes	*papyres*	*papyrus*
66	6	palmyrien	palmyrénien
70	21	ces cinq chiffres	les cinq chiffres
71	1	notation	notion
71	4	les plans vides	les places vides
71	11	concurrement	concurremment
72	19	effluerée	effleurée
73	27	quoique	quoi que
74	13	n'est arrivée	nous est arrivée
74	22—22	ou bien ajonterai-je aux Babyloniens	ou bien, ajonterai je, aux Babyloniens
77	8	chez son auteur	chez un auteur
77	22	donnent toujours	donne toujours
80	15	aux neuf de Boece	aux neuf chiffres de Boece

Page	Ligne	*au lieu de :*	*lisez :*
80	33	Les autres règles d'Odon, pour	Les autres règles pour
82	dernière des notes	à Reims *en* 982, et qu'il resta	à Reims *en* 972, et qu'il y resta
83	24	pour le rendre	pour se rendre.
85	6 des notes	vaux	vant
87	29	traduction	tradition
90	27	Sirie	Syrie
92	13	portées à un point	portées par lui à un point
93	8	Dans les recherches	Dans ses recherches
93	26	briève	brève
97	13	la raison	la saison
98	17	conéiforme	cunéiforme.
98	34	n'ont par conçu	n'ont pas conçu
98	36	n'ayant par le zéro	n'ayant pas le zéro
99	5	tres différent	très différente
99	9	coifficient	coéfficient
108	14	briève	brève
100	19	comme de chiffres	comme des chiffres
100	24	tel que	tels que
100	34	à colonne	à colonnes
100	16—17	pour le nombres	pour les nombres
100	26	bracmanes	brahmanes

N. B. Beaucoup de petites fautes d' impression, faciles à corriger, sont omises dans cet Errata.

LES SIGNES NUMÉRAUX ET L'ARITHMÉTIQUE

CHEZ LES PEUPLES DE L'ANTIQUITÉ ET DU MOYEN-ÂGE.



EXAMEN

de l'ouvrage allemand intitulé: *Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker*
von Dr. MORITZ CANTOR (Halle, 1863, in-8.). 1)

Au mois de juillet 1863, M. le Prince Boncompagni, toujours aussi empressé à susciter qu'à accomplir lui-même des recherches sur l'histoire des sciences mathématiques, m'invitait à prendre l'engagement de lui envoyer, avant la fin de l'année 1863, pour les *Annales des sciences mathématiques et physiques* publiées à Rome par M. B. Tortolini, un examen détaillé de l'ouvrage important que M. Moritz Cantor venait de faire paraître en Allemagne sous le titre que je viens de transcrire.

Malgré de grands et nombreux travaux qu'il ne m'était pas possible d'interrompre, je n'ai pu résister ni à cette invitation si honorable pour moi, ni à l'attrait que je trouvais à revenir, à la suite de M. Cantor, sur une question très vaste, dont j'avais abordé quelques points seulement dans un mémoire 2) publié en 1857.

Je ne comprenais pas toute l'étendue de la tâche dont je me chargeais, et surtout je ne prévoyais pas à quels développements je me laisserais entraîner. Mais je ne regrette pas cette illusion, puisqu'à force de travail et sans négliger mes autres occupations, j'ai pu finir à temps et accomplir exactement ma promesse.

Frappé de l'importance des questions traitées par M. Cantor, je me suis appliqué à faire connaître sommairement tout le contenu de son livre, et à signaler, dans ses recherches sur l'histoire de la numération, les vues vraies et neuves, ou du moins exposées avec un nouveau degré de clarté et de probabilité, les faits nouveaux qu'on y rencontre quelquefois, et l'enchaînement nouveau qui souvent y donne une nouvelle valeur à des faits déjà connus. Mais je me suis appliqué aussi à noter les lacunes, les défauts, les erreurs, ou les hypothèses hasardées, que j'ai cru remarquer dans ce livre si estimable. En outre, j'ai pris à tâche de fortifier les preuves ou les inductions présentées par M. Cantor à l'appui de propositions dont j'admets comme lui la certitude ou la probabilité; de combler les lacunes de son travail, autant que j'ai pu le faire; de rectifier ce qui m'a paru inexact; de combattre ce qui m'a semblé erroné, et de dire nettement mon opinion sur les détails et sur l'ensemble. Pour cela j'ai mis à profit, outre mon travail d'autrefois et mes réflexions plus récentes, les lumières qui m'ont été fournies tant par mes recherches personnelles que par l'ouvrage même de M. Cantor, par des ouvrages qu'il a consultés, et par d'autres qui auraient pu lui être d'une grande utilité, s'il avait eu, comme moi, l'avantage de les connaître. En un mot, dans cet examen, pour lequel je réclame l'indulgence des lecteurs en considération de la hâte que j'ai dû apporter dans la rédaction, j'ai fait tout ce que j'ai pu pour rendre quelques services à l'his-

1) XII et 432 pages in-8, avec 51 figures distribuées en 4 planches. — 2) *Recherches nouvelles concernant les origines de notre système de numération écrite.* Paris, 1857, in-8., 57 pages (Extrait de la *Revue Archéologique*).

toire des mathématiques, et en cela j'ai suivi, selon la mesure de mes forces et du temps dont je pouvais disposer, l'honorable exemple de l'auteur du livre dont j'ai à rendre compte.

Mathématicien aussi savant que modeste, M. Cantor a été porté par l'amour de la science à en étudier l'histoire. Étranger à cet esprit de polémique et de dénigrement si commun en Allemagne comme ailleurs, il aime à citer ses devanciers, pour dire franchement ce qu'il croit leur devoir, ou bien en quoi et pourquoi il s'écarte de leurs traces, et non pour relever aigrement leurs fautes réelles ou prétendues.

Envers un auteur de ce caractère, la critique doit être non-seulement juste, mais bienveillante. Pourtant s'adressant à un ami sincère de la verité, elle doit s'efforcer de la lui dire toute entière, telle qu'elle croit la voir, sur les défauts comme sur les mérites de son œuvre.

Je vais suivre pas à pas la marche du livre de M. Cantor, l'analyser et l'apprécier en détail, et je donnerai pour titre à chaque partie de cet examen la traduction du titre même de la partie correspondante dans l'ouvrage allemand.

Introduction 1).

Le titre trop général et trop peu précis de cet ouvrage peut se traduire ainsi: *Matériaux mathématiques pour servir à l'histoire de la vie intellectuelle des peuples*. Mais, comme l'auteur l'explique lui-même dans son *Introduction*, l'objet spécial et réel de l'ouvrage est d'étudier l'histoire des signes figurés de numération, et de marquer les rapports qui existent entre cette histoire et celle des peuples qui ont fait usage de ces signes.

Déjà antérieurement M. Cantor avait donné sur ce même sujet quelques dissertations détachées, dans la *Feuille périodique de mathématiques et de physique* qu'il publie de concert avec M. le professeur Schlœmilch et avec M. le docteur Kahl. Puis une dissertation publiée en 1859 par M. Joseph Krist *Sur les systèmes de numération et leur histoire* 2), et surtout une dissertation publiée en 1861 par M. Friedlein sur *Gerbert, la Géométrie de Boëce et les chiffres indiens* 3), ont inspiré à M. Cantor la pensée de reprendre ce sujet, pour le traiter d'une manière plus étendue.

Partant des signes numéraux de Gerbert pour en chercher l'origine, M. Friedlein se trouve conduit à remonter jusqu'à l'Inde. Suivant une autre méthode, qu'il considère comme plus naturelle et plus sûre, M. Cantor commence par étudier les signes de numération des plus anciens peuples, puis il en suit, dans des temps plus récents, les transformations diverses, à travers lesquelles il arrive à expliquer l'origine et la constitution de notre système de chiffres. Cette méthode est plus longue; mais, fidèlement et complètement suivie, elle aurait l'avantage d'embrasser plus sûrement tous les faits qui devraient concourir à la solution de ce dernier problème. D'ailleurs, les faits qu'on rencontre dans cette vaste investigation possèdent, outre cette utilité spéciale, un intérêt plus général pour l'histoire des connaissances mathématiques chez les différents peuples, et pour l'histoire des rapports des peuples entre eux. C'est ainsi que M. Cantor s'est proposé de rattacher à l'histoire universelle de l'espèce humaine l'étude des signes de numération.

Pour accomplir cette tâche si largement comprise, un mathématicien devait avoir besoin, soit d'entreprendre d'immenses recherches historiques, soit d'emprunter les lumières d'autrui. M. Cantor a pris franchement ce dernier parti, et il n'y aurait qu'à l'en féliciter, s'il avait été toujours suffisamment éclairé dans le choix de ses guides en ce qui concerne l'histoire générale des nations, et s'il s'était suffisamment enquis de tous les documents relatifs à l'histoire de l'arithmétique et de la numération. Mais, comme nous le verrons, il a donné trop de confiance à quelques autorités peu sûres, et il a ignoré ou négligé des publications qui auraient pu lui fournir de grandes lumières.

---

1) *Einleitung*, p. 1-8 du livre de M. Cantor. — 2) *Ueber Zahlensysteme und deren Geschichte*, dans le 4. Rapport annuel de l'École pratique (*Realschule*) supérieure de Bude (*Ofen*). — 3) *Gerbert, die Geometrie des Boëthius und die indischen Ziffern, ein Versuch in der Geschichte der Arithmetik*. Erlangen, 1861, in-8., 60 pages et 6 planches.

Par exemple pour l'histoire de quelques anciens peuples et des quelques anciens philosophes, il s'en est tenu trop facilement aux hypothèses de M. Rœth. Pour l'histoire des mathématiques pures, considérée dans ses rapports avec le développement de l'esprit humain, il parait n'avoir pas connu l'ouvrage court et substanciel de M. Arneth 4), qui, à côté d'hypothèses très contestables, lui aurait fourni, sur un point important, quelques vues capables de rectifier les siennes. J'ose ajouter qu'un mémoire 5) publié par moi en 1854, et que M. Cantor ne parait pas avoir connu, aurait pu lui offrir quelques notions utiles sur les rapports de la géométrie grecque avec celle des Egyptiens et avec celle des Indiens. L'étude des systèmes de chiffres chez tous les peuples se lie étroitement 1° à l'étude de leurs systèmes de numération parlée, 2° à l'étude des noms de nombre employés dans leurs langues. Sur le premier point, le livre de M. Arneth aurait pu offrir à M. Cantor quelques indications précieuses malgré leur brièveté, et sur les deux points il aurait pu consulter avec fruit les recherches de M. Lepsius 6), et de M. Beolœv 7); sans donner une confiance exagérée à certaines conjectures qui s'y rencontrent. Sur l'histoire des chiffres en particulier, M. Cantor signale le malheur que MM. Krist et Friedlein ont eu de ne pas connaître les résultats importants de travaux français, parmi lesquels, à côté de ceux de M. Chasles et de M. Vincent, il me fait l'honneur de citer avec éloge la dissertation que j'ai publiée en 1857 sur les origines de notre système de numération écrite. Mais M. Cantor lui-même a eu le malheur de ne pas connaître ou de négliger d'autres travaux publiés sur la même question en France et en Italie. Il parait avoir ignoré les recherches de Cossali, publiées en 1857 par M. le prince Boncompagni 8), sur les origines de nos chiffres et de la valeur de position. Sur les chiffres des peuples orientaux, il n'a pas connu un ouvrage important publié en 1860 par M. Piban 9). Il n'a pas connu davantage un Mémoire de M. Woepcke, publié à Rome en 1859, sur l'*Introduction de l'arithmétique indienne en occident* 10). M. Cantor, comme on l'aperçoit trop à l'insuffisance de ses connaissances sur les chiffres *gobâr* des Arabes occidentaux, n'a pas connu davantage la traduction donnée à Rome en 1859 par M. Woepcke, d'un traité arabe sur le calcul *gobâr* 11), non plus que la traduction, que le même savant a donnée à Rome en 1861, d'un traité mathématique composé par un arabe d'orient 12). Il a cité 13), sur l'arithmétique arabe, un article de M. Woepcke, inséré en 1854 dans le n. XIII du *Journal asiatique* de Paris; mais il a ignoré ou négligé d'autres articles du même savant, insérés dans le même Journal en 1852, en 1860 et en 1862 14), et, ce qui est très facile à concevoir, mais très regrettable en même temps, il n'a pas connu le *Mémoire* que M. Woepcke a publié, au commencement de 1863, *sur la propagation des chiffres indiens en occident* 15), œuvre capitale, dont je profiterai largement et avec une juste reconnaissance.

Les recherches de M. Woepcke ne font nullement double emploi avec celles de M. Cantor. Le premier traite à fond un sujet beaucoup plus restreint, sur lequel il jette une nouvelle et vive lumière. Le second laisse à désirer sur plusieurs parties du champ immense qu'il a parcouru, et principalement sur celles que le premier a heureusement approfondies. Mais sur des points nombreux, M. Cantor ajoute beaucoup à la

---

4) *Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Entwickelung des menschlichen Geistes.* Stuttgart, 1852, in-8., 291 pages. — 5) *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie et sur tous les ouvrages mathématiques grecs, conservés ou perdus, publiés ou inédits, qui ont été attribués à un auteur nommé Héron.* Paris, 1854, in-4., 488 pages (t. IV, 1 série des Mém. présentés par divers savants à l'académie des inscriptions et belles-lettres). Voyez III. partie ch., I, § 3, p. 163-173, et surtout p. 173-175. Comparez *Conclusion*, p. 366-368. — 6) *Zwei Sprachvergleichende Abhandlungen, II Ueber den Ursprung und die Verwandschaft der Zahlenwœrter in der indogermanischen, semitischen und der koptischen Sprache.* Berlin, 1836, in-8. p. 81-150. — 7) *Recherches sur l'origine des noms de nombre japhétiques et sémitiques.* Giessen, 1861, in-8, 108 pages. — 8) *Lezioni sull'aritmetica (Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni,* Roma, 1857, in-4. p. 217-350, et *Memorie storico-scientifiche sulla origine dell' odierna aritmetica e dell' algebra, loro trasporto dall' oriente in Italia, e primi progressi nelle contrade di questa. (Scritti ined., p. 251-397.)* — 9) *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes.* Paris, 1860, in-8, 271 pages. — 10) 73 pages, in-4. — 11) *Atti dell' accademia pontificia dei Nuovi Lincei,* t. XII, p. 230-275 et p. 399-438 — 12) *Atti dell' accad. pontif.* t. XIV. — 13) Note 518, p. 420, et note 640, p. 431. — 14) 1852, n. 12; 1860, n. de février-mars, et 1862, n. de février-mars. — 15) Paris, 1863, in-8., 193 pages, Extrait du n. 1 de l'année 1863 du *Journal asiatique.*

somme des notions historiques répandues parmi les savants; de plus, il a le mérite de rapprocher et de réunir ces notions en un ensemble qui les fait valoir et qui appelle de nouveaux progrès. Dans l'œuvre de ce savant, l'ensemble présente des défauts et des lacunes. Mais l'auteur n'a promis que des *matériaux* utiles et non un travail définitif. Certes, il a tenu grandement cette promesse de son titre. En rapprochant le volume de M. Woepcke de celui de M. Cantor, on a vraiment une somme considérable de connaissances sur l'histoire de la numération chez tous les peuples, et l'on est bien près d'entrevoir la solution des difficultés que tous deux laissent subsister et la conciliation des divergences qui les séparent.

Cependant il y a un point que M. Woepcke a laissé entièrement dans l'ombre, point que M. Cantor a touché en me citant, mais qu'il a ensuite oublié, et dans lequel je crois trouver un élément essentiel et décisif de la solution d'une des difficultés principales: ce sont les cinq chiffres ordinaux de la vieille écriture hiératique des Egyptiens pour les nombres au dessous de dix dans l'indication des jours du mois. Sur ce point j'exposerai mes vues personnelles, et j'en ferai valoir les conséquences.

Mais, voulant avant tout faire connaître ce qu'il y a de bon et d'utile dans l'ouvrage de M. Cantor, j'étudierai successivement, après son *Introduction*, les 24 chapitres dont cet ouvrage se compose et les *considérations finales* qui le terminent. Je ne me propose nullement de dispenser de le lire, mais, au contraire, de faire comprendre combien cette lecture est importante, et de la rendre plus profitable. C'est dans les 363 pages du texte de M. Cantor et dans les 69 pages de ses notes, qu'il faut chercher les détails des preuves qu'il donne, et l'indication des documents nombreux auxquels il renvoie. Mais j'aurai grand soin de citer d'une part les documents qu'il a ignorés, d'autre part ceux qu'il a regretté de n'avoir pas à sa disposition, et parmi lesquels on remarque avec quelque surprise des livres importants et peu rares, tels que l'*Arithmétique* de Nicomaque, le *Commentaire* de Jamblique sur cet ouvrage, et l'*Astronomie élémentaire* de Geminus.

Dans tout le cours de son ouvrage, M. Cantor a été dirigé par une pensée qu'il exprime au commencement de son Introduction. Suivant lui, les ressemblances qui se rencontrent entre diverses populations en ce qui concerne tel ou tel domaine du développement intellectuel, par exemple en ce qui concerne les procédés mathématiques, et notamment les signes de numération, ne sont pas dues au hasard *la plupart du temps*, mais viennent ordinairement d'influences réciproques ou bien d'une communauté d'origine. Cette proposition attribue avec raison à l'étude historique des connaissances humaines en général, et des connaissances mathématiques en particulier, une grande importance pour éclairer les origines et les relations antiques des peuples, et pour combler ainsi des lacunes de l'histoire politique et de l'ethnographie. Telle qu'elle est formulée par l'auteur, cette proposition peut se justifier par la restriction qu'elle exprime en faveur des *ressemblances dues quelquefois au hasard*, et par d'autres restrictions nécessaires, que M. Cantor peut avoir sous-entendues, mais qu'il aurait été bon d'énoncer et d'expliquer, et sur lesquelles je vais dire ici ma pensée.

Parmi les ressemblances qu'on remarque dans les produits de l'activité intellectuelle des nations, celles qui sont superficielles et isolées peuvent être dues au hasard, c'est à dire à la rencontre, en un même point, d'événements qui appartiennent à des séries de causes et d'effets indépendantes les unes des autres dans tous les autres termes dont ces séries se composent 16). Quant aux ressemblances profondes, multipliées et liées entre elles, il s'agit encore de faire la part des différentes causes qui peuvent les avoir produites. Ces causes possibles me paraissent être: 1° l'identité de nature entre les objets étudiés par des peuples différents; 2° l'identité naturelle des procédés fondamentaux de l'esprit humain, identité spécifique qui subsiste sous la diversité d'aptitudes des races humaines; 3° une tradition remontant à l'origine commune de plusieurs peuples; 4° une transmission opérée postérieurement par l'influence d'un peuple sur un autre.

16) Sur cette notion philosophique du hasard, voyez M. Cournot, *Essai sur les fondements de nos connaissances*, t. 1, chap. 3, p. 49-57. (Paris, 1851. in-8.).

De ces quatre causes possibles, les deux premières n'ont pas été mentionnées par M. Cantor dans son Introduction : elles expliquent certaines ressemblances nécessaires, ou presque inévitables, dans des circonstances où l'esprit humain n'avait qu'une voie à suivre, ou bien n'avait à choisir qu'entre un petit nombre de combinaisons possibles. Mais les deux dernières causes, soit séparées, soit réunies, sont les seules qui puissent expliquer, parmi les ressemblances profondes, multipliées et liées entre elles, celles qui s'étendent à des détails choisis entre beaucoup d'autres combinaisons possibles. Il faut prendre garde d'exagérer la part des deux dernières causes, en leur assignant des effets qui peuvent s'expliquer par la nature même des choses et par l'identité spécifique des procédés de l'esprit humain, ou bien par le hasard. Il faut prendre garde aussi d'attribuer à des influences réciproques, et comparativement récentes, des ressemblances dues à une communauté d'origine entre les peuples, ou de commettre l'erreur inverse. Nous verrons jusqu'à quel point M. Cantor, dans les diverses parties de son livre, a su faire ces distinctions si nécessaires et quelquefois si difficiles.

I. Les Egyptiens. 1)

Avant d'aborder l'analyse de ce chapitre, il me semble nécessaire de dire quelques mots sur une question préliminaire que M. Cantor n'aurait pas dû négliger. Voulant étudier l'histoire de l'arithmétique dans ses rapports avec celle de la culture intellectuelle, et commençant par l'Egypte, il aurait dû indiquer les grandes phases que la civilisation égyptienne a présentées. Grâce aux découvertes de Champollion, de Young et de leurs continuateurs, les antiquités de l'Egypte sont sorties, en partie, de leurs ténèbres mystérieuses. On connait maintenant la puissance de quelques unes des douze premières dynasties énumérées par Manéthon à partir de Ménès, et surtout de la XIIe; on sait que quelques unes des plus anciennes parmi ces douze dynasties toutes indigènes, mais dont plusieurs ont été simultanées, comprennent les rois fondateurs des grandes pyramides; on sait qu'après la XIIe dynastie est venue une décadence, suivie de l'invasion sémitique et de la domination, d'abord oppressive, des Hycsos, qui pourtant acceptèrent peu à peu les arts, les croyances et la religion des vaincus, et à côté desquels des dynasties indigènes subsistèrent en quelques contrées de l'Egypte 2). On connait l'expulsion des Hycsos, accomplie vers le XVIIIe siècle avant notre ère; la gloire de la XVIIIe dynastie et de la XIXe, qui étendirent leur domination jusqu'aux bords de l'Euphrate et y établirent l'influence Egyptienne pour cinq siecles. On sait qu'ensuite des troubles intérieurs firent perdre à l'Egypte ce vaste développement extérieur de sa puissance, et qu'au milieu de quelques alternatives de prospérité et de revers, elle en vint au point de tomber à son tour sous une domination étrangère, c'est-à-dire sous celle des Ethiopiens d'abord, puis sous celle des Perses, sous celle des Grecs et sous celle des Romains, mais non sans faire subir aux conquérants l'influence de ses idées et de ses croyances, et en devenant un foyer où s'opéra la fusion des idées de l'orient et de celles de l'occident. Ces faits, bien établis maintenant, sont de l'importance la plus haute pour l'histoire des sciences; car, par exemple, ils expliquent un antique échange de notions scientifiques entre les Egyptiens et les Babyloniens, fait indiqué par les anciens et confirmé par les recherches modernes.

Au lieu de tout cela, M. Cantor (p. 9-10) se contente de signaler, après M. Braun 3), l'antiquité et l'originalité des arts en Egypte, d'y faire remonter l'écriture au delà de 2000 ans avant notre ère (ce qui est bien au dessous de la réalité), de dire que Sésourtésen II, dont on admire le tombeau orné de peintures à Beni-Gassan, est du XXIIIe. siècle avant notre ère (date très contestable), et que Ramsès II, le grand Sésostris, dont le monument près de Thèbes est orné de peintures astronomiques, est du XVe siècle avant

1) *Die Ægypter*, p. 9-21 de M. Cantor.— 2) La XIVe et la XVIIe dynasties indigènes furent contemporaines de la XVe et de la XVIe, qui appartenaient aux Hycsos. — 3) *Geschichte der Kunst in ihrem Entwicklungsgang durch alle Völker der alten Welt.* Wiesbaden, 1856 et 1858, in-8., 2 volumes parus.

Jésus-Christ (ce qui est vrai). Et voilà tout ce que M. Cantor trouve à nous dire sur l'histoire d'Egypte. C'est qu'il a négligé de consulter les travaux de M. de Rougé, de M. Mariette et d'autres savants français, et même les ouvrages de ses savants compatriotes MM. de Bunsen, Lepsius et Brugsch. Son guide principal, pour l'histoire d'Egypte, comme pour quelques autres parties de l'histoire ancienne, a été M. Rœth, dont la science, très grande sur quelques points, offre sur d'autres points les plus étranges lacunes, parceque, trop confiant dans ses hypothèses hasardées, il affecte d'ignorer les travaux de ses devanciers et de ses contemporains. C'est ainsi que, dans son volume publié en 1846, *sur les doctrines réligieuses de l'Egypte et de Zoroastre*, M. Rœth 4) déclare n'avoir pas consulté les volumes alors publiés de l'ouvrage de M. de Bunsen sur l'Egypte, et met en doute l'utilité de cette lecture, qui pourtant aurait pu lui épargner les erreurs énormes qu'il a commises dans son *Aperçu des anciens temps de l'histoire*, par exemple, en prenant 5) pour des rois Hycsos les indigènes de la IVe et de la Ve dynastie de Manéthon, fondateurs des grandes pyramides de Gyzeh.

Je ne m'arrêterai pas à l'aperçu rapide que M. Cantor présente sur les diverses formes de l'écriture égyptienne. Je remarquerai seulement, en passant, qu'il fait un contresens en voulant traduire une phrase grecque de Saint Clément d'Alexandrie sur le *scarabeus sacer* ou *pilularius* 6) symbole du soleil chez les Egyptiens. M. Cantor aurait dû remarquer ici que pour exprimer les noms de nombre par l'écriture, tantôt les Egyptiens employaient des signes numéraux idéographiques et arbitrairement choisis, c'est-à-dire des chiffres, tantôt, et plus souvent dans les inscriptions ils écrivaient les noms de nombre, comme les autres mots de leur langue, par des signes les uns phonétiques, les autres symboliques. Sur l'écriture égyptienne des noms de nombre, la somme des connaissances acquises a été augmentée par la savante explication de l'inscription d'Edfou, donnée en 1855 par M. Lepsius dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, et que M. Cantor aurait dû citer. On y voit qu'au lieu d'employer une fraction dont le numérateur aurait été plus ou moins fort, les Egyptiens, comme Ptolémée et d'autres Grecs, la décomposaient en une suite de fractions ayant toutes pour numérateur l'unité. Du reste, la notation Egyptienne des fractions en chiffres, notation que M. Cantor a eu le tort d'omettre, procédait de même.

Arrivons aux chiffres des Egyptiens. Les renseignements donnés sur ces signes numéraux par M. Cantor, et accompagnés de figures 7), sont exacts et presque suffisants en ce qui concerne les signes *hiéroglyphiques* et les signes *hiératiques* des nombres tant cardinaux qu'ordinaux. Il a fort bien remarqué que chacun des neuf premiers nombres s'exprime dans l'écriture hiéroglyphique par la répétition du signe de l'unité, et que ces signes ainsi répétés se divisent par groupes de 4 au plus; que dans l'écriture hiératique les 10 premiers nombres cardinaux s'expriment par dix signes distincts, et qu'au contraire parmi les neuf premiers nombres ordinaux des jours du mois dans cette même écriture hiératique, les nombres 1, 2, 3, 4 et 9 sont les seuls qui s'expriment chacun par un signe unique, tandis que les nombres 5, 6, 7 et 8 s'expriment par l'union deux à deux des signes de 2, de 3 et de 4. De cette double remarque M. Cantor aurait pu conclure avec vraisemblance que parmi les signes hiératiques ceux des

---

4) *Geschichte unserer abendländischen Philosophie*, I Band, *Die Ægyptische und die Zoroastrische Glaubenslehre*, Préface, p. VIII. Mannheim, 1846, gr. in-8. — 5) Même volume, *Uebersicht der ältesten Geschichte*, p. 96. — 6) Il est faux que ce scarabée *tourne les dos* à la boule de fiente de bœuf qu'il a l'habitude de rouler devant lui, et jamais le mot grec ἀντιπροσώπως n'a signifié *tournant les dos*: ce mot veut dire, au contraire, *tourné en face*. Si le scarabée, comme le veut M. Cantor, était comparé par Saint Clément à un homme qui détournait les yeux, parcequ'il ne pourrait pas supporter l'éclat du globe solaire, ce serait le globe de fiente de bœuf, et non le scarabée, qui serait le symbole du soleil. Suivant Saint Clément et d'autres auteurs anciens qui complètent son explication de ce symbole, les Egyptiens considéraient le soleil, représenté par le scarabée, comme le moteur qui produit le mouvement diurne du globe céleste d'orient en occident autour de la terre, tandis que le soleil lui-même, exécutant annuellement une révolution en sens contraire autour du ciel, marche en face de la direction qu'il lui imprime. C'est ainsi qu'un homme ou un animal, courant dans une roue mobile sur un axe fixe, la fait tourner en sens contraire. Voyez mes *Etudes sur le Timée de Platon*, t. 2, p. 111-112. (Paris, 1841, in-8.). — 7) Voyez M. Cantor, p. 12-19, et figures 2, 3, 4, 5, 6 et 7 des planches.

nombres ordinaux des jours du mois sont plus anciens que ceux des nombres cardinaux, puisque les premiers seuls portent la trace de la période quaternaire, reconnaissable aussi dans le système hiéroglyphique de la notation égyptienne des nombres. Il aurait dû ajouter que la notation hiératique ordinale des jours du mois a passé dans l'écriture *démotique* des Egyptiens.

Au dessus du nombre 9, l'écriture hiéroglyphique a des signes particuliers pour 10, pour 100, pour 1000 et pour 10000, et elle exprime les nombres de dixaines, de centaines et de milliers par la répétition du signe; tandis que l'écriture hiératique a de plus des signes particuliers pour les 9 nombres cardinaux tant de dixaines que de centaines et de milliers. Mais ces signes offrent diverses combinaisons du signe de 100 ou de 1000 avec les signes des nombres d'unités simples pris pour multiplicateur, mais avec l'aide du procédé additif. M. Pihan montre que les seuls multiplicateurs ainsi employés sont 2, 3, 4, rarement 7, et 3 et 4 placés en haut avec valeur double.

Là s'arrête M. Cantor. Voici ce qu'il aurait dû ajouter 8). Ces deux écritures procèdent par répétition pour les nombres de myriades. Cependant les nombres de myriades, depuis 5 jusqu'à 9, se trouvent aussi exprimés par les signes de ces nombres placés au dessus du signe de la myriade. Pour les centaines de mille et les millions, dans l'écriture hiéroglyphique on mettait le signe de 1000 au dessous des signes qui exprimaient le nombre de milliers; dans l'écriture hiératique, le signe du nombre 100, placé au dessous des signes des nombres 1000, ou 2000, ou 3000, ou 10000, etc., servait de multiplicateur à ces nombres. Enfin l'écriture hiéroglyphique avait aussi des signes particuliers pour les centaines de mille, les millions et les dixaines de millions.

Voici des omissions plus graves. M. Cantor a négligé de faire connaître les signes *démotiques* des nombres: cette notation est parfaitement exposée dans la *Grammaire démotique* de M. Brugsch. Le même ouvrage, s'il l'avait consulté, lui aurait fourni les signes des fractions, et les signes de l'addition, de la soustraction et de la multiplication, objets sur lesquels il n'a donné que des renseignements insuffisants. Tout cela se trouve réuni et très bien expliqué dans l'ouvrage de M. Pihan 9). Mais M. Cantor s'est contenté de suivre le tableau de M. Seyffarth.

Il a reproduit avec trop de confiance la fausse hypothèse de M. Seyffarth sur l'étoile à cinq rayons, considérée par cet égyptologue comme symbole de Mars, cinquième planète, tandis que suivant Horapollon 10), elle signifie le nombre 5, et qu'en effet, dans l'inscription de Rosette, l'étoile à 5 rayons, placée au dessus d'un globe solaire, signifie cinq jours solaires, comme le texte grec de cette inscription le prouve 11). D'ailleurs l'inscription d'Edfou, expliquée par M. Lepsius 12), prouve que cette étoile était bien certainement, non pas, il est vrai, un chiffre, mais un caractère symbolique exprimant le nombre 5 dans l'écriture hiéroglyphique, du moins à l'époque des Ptolémées. M. Cantor a reproduit de même, mais sans y adhérer, l'hypothèse de M. Seyffarth sur la valeur alphabétique des chiffres des Egyptiens: C'est là une des mille rêveries de cet égyptologue peu digne d'être cité 13).

M. Cantor aurait mieux fait d'examiner un savant mémoire de M. Lepsius 14), dont voici les conclusions sur la numération *parlée* des Egyptiens. Nous avons vu que, dans le système des signes numéraux hiéroglyphi-

---

8) Voyez les tableaux de M. Pihan, p. 26-41, et M. Devéria, *Notation des centaines de mille et des millions dans le syst. hiérogl. des anc. Egypt.* (Extrait de la Revue archéol. 1862.). — 9) P. 33 et p. 35-40. — 10) *Hiérogl.*, I, 13, p. 20, ed. Leemans. — 11) Voyez M. Jomard, dans la *Description de l'Egypte*, *Antiquités*, *Mémoires*, t. 2, p. 62 (Paris, 1818, in-fol.), et M. Pihan, p. 34-36. — 12) *Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, *philos. hist. Klasse*, 1865, p. 78. — 13) Voulant voir partout des symboles scientifiques, M. Seyffarth lit sur les monuments égyptiens des dates imaginaires, de même qu'il lit, dans l'ordre des lettres de ce qu'il appelle l'*alphabet sémitique*, la date précise du déluge. Comparez mon Mémoire intitulé : *Opinion de Manéthon sur la durée totale de ses 30 dynasties*, note 32 (Extrait de la *Revue Archéologique*, année 1860). Les rêves chronologiques et astronomiques de M. Seyffarth sont, ou du moins *étaient*, suivant l'expression dure, mais juste, de M. de Bunsen, *une honte pour l'Allemagne* (*Ægyptens Stelle in der Weltgeschichte*, t. 4, p. 40, et t. 5, 2 partie, Préface, p. XVII). Je dis *étaient*; car M. Seyffarth, désespérant de faire école en Allemagne, est allé professer en langue anglaise ses doctrines à Saint Louis dans l'état de Missouri. Voyez la préface de son livre intitulé : *Chiliasm critically examined by* Gustav Seyffarth. New-York, 1861, in-8.— 14) Cité ci-dessus, *Introd.*, note 3. Voyez surtout, §§ 8, 22-24, 26, 29-32 et 34; p. 86-90, 104-106, 109-110, 111-115, et 136-137.

ques et dans le système des signes hyéroglyphiques pour les nombres ordinaux des jours du mois, les Egyptiens procédaient par addition audessus du nombre 4 jusqu'au nombre 9, et que pour les dizaines ils procédaient aussi par addition au dessus de 40 jusqu'au 90. De même, cette habitude de procéder par addition au dessus de 4 se retrouve dans la formation des noms de nombre dans la langue copte, issue de la langue égyptienne. Cette habitude de s'arrêter au nombre 4, nombre égal à celui des mois de chacune des trois saisons dans l'année égyptienne de 12 mois, pourrait faire supposer chez ce peuple l'existence antique d'un système de numération quaternaire d'abord, puis duodécimal, que le système décimal aurait remplacé plus tard, sans en effacer la trace. En effet, le nom copte qui signifie 8 est le duel de celui qui signifie 4. Ainsi le système décimal ne se serait introduit qu'après coup dans la numération égyptienne, tandis qu'il est primitif dans la numération indo-européen. Sans accorder une confiance entière à cette hypothèse de M. Lepsius, on doit tenir compte des faits sur lesquels elle s'appuie.

M. Cantor aurait dû aussi, dès ce chapitre et sauf à y revenir plus tard, signaler la ressemblance frappante qui existe entre les chiffres hiératiques ordinaux 1, 2, 3, 4 et 9 pour les jours du mois, tels que ces chiffres se trouvent dans des documents égyptiens très antiques, et les figures des chiffres correspondants dans le système de Boèce, dans le système des Arabes occidentaux et orientaux, dans le système indien et dans notre système moderne. J'avais signalé cette ressemblance 15), notée aussi depuis par M. Pihan (p. 41.). M. Cantor, qui la mentionne, en me citant, dans son chapitre XVI (p. 239), l'oublie ensuite entièrement, quand il s'agit de remonter à l'origine de nos chiffres. Je me garderai bien d'imiter cet oubli dans la suite de cet Examen.

En terminant ce chapitre M. Cantor rappelle les textes d'Hérodote et de Platon sur la culture de l'arithmétique chez les Égyptiens, et le texte important de l'*Astronomie* de Théon de Smyrne sur l'emploi des figures géométriques dans l'astronomie égyptienne. Sur cette astronomie elle-même, il ne dit qu'un seul mot, pour reproduire, après M. Rœth, une ancienne hypothèse de M. Biot, abandonnée depuis par ce savant lui-même et réfutée par la découverte, que M. Lepsius a faite, des *cinq jours épagomènes* sur des monuments très antérieurs à l'an 1780 avant notre ère, époque prétendue de la transformation d'une année égyptienne de 360 jours en une année de 365 jours.

Sur la géométrie des Egyptiens, qu'il se représente comme très savante, M. Cantor promet de revenir (chapitre VI) à propos de Thalès et de Pythagore, leurs disciples. Quand cette appréciation, beaucoup trop favorable à la géométrie des Égyptiens, se représentera, il sera temps de la combattre.

M. Cantor omet ici les Phéniciens, les Palmyréniens 16), et les Syriens 17). Ces trois peuples avaient chacun deux systèmes de notation numérale, l'un alphabétique, comme celui des Hébreux 18) et des Grecs, l'autre analogue d'une part à la notation hiéroglyphique des Egyptiens, d'autre part à la notation cunéiforme des Babyloniens. M. Cantor saisira plus tard une occasion moins naturelle de parler des deux notations des Syriens et des Palmyréniens et de la notation des Hébreux 19); mais les Phéniciens seront définitivement omis. Ici, de l'Egypte, il passe immédiatement à la Babylonie.

II. Les Babyloniens. 1)

Après un bon et court résumé 2) sur l'écriture cunéiforme, et sur les trois langues auxquelles elle a été appliquée, langue *perse*, langue *assyrienne*, et langue *scytique* de la Susiane 3), nommée aussi langue *tou-*

---

15) *Rech. nouv. sur l'origine de notre système de numération écrite* (*Revue archéol.* 1857), §§ 6 et 8, p. 20 et 55 du tirage à part. — 16) Sur la numération écrite des Phéniciens et des Palmyréniens, voyez M. Pihan, p. 163-166. — 17) Voyez M. Rœdiger, *Die Syrischen Zahlzeichen*, dans la Revue de la Société orientale allemande, t. 16, p. 577 et suiv., et M. Cantor, ch. XVII, p. 256 et figure 49. — 18) Sur la notation hébraïque des nombres, voyez M. Pihan, p. 160-170. — 19) Voyez M. Cantor, chap. XVII, p. 253-256, et figures 46, 47 et 48. — 1) *Die Babylonier*, p. 22-38 de M. Cantor. — 2) M. Cantor a consulté surtout M. Spiegel, *Die altpersischen Inschriften* (Leipzig, 1862), et M. Mordtmann, *Erklærung der Keilinschriften der zweiten Gattung* (Leipzig, 1862). Il aurait pu consulter aussi MM. Rawlinson, de Saulcy, Oppert, et Ménant. — 3) Suivant l'opinion de M. Mordtmann, adoptée par M. Cantor, les peuples scytiques, auxquels s'adressait le second texte de l'inscription trilingue de Behistoun, étaient ceux de la Susiane.

raniens ou *asariens*, M. Cantor se hâte d'arriver aux signes numéraux cunéiformes des Assyriens, signes qui, étant idéographiques, étaient employés également, avec de légères différences, par les Perses et par les Scythes, malgré la différence complète des trois langues. Sur cette notation cunéiforme des nombres, M. Cantor donne des renseignements auxquels, pour être aussi complets que ceux qui avaient été fournis à M. Pihan par M. de Saulcy d'après l'inscription cunéiforme trilingue de Béhistoun 4), il ne manque qu'une indication, mais bien importante, celle de la notation cunéiforme des fractions. Le numérateur de la fraction s'exprime seul à la suite des nombres entiers, et le dénominateur sous-entendu est toujours 60. Si M. Cantor avait connu ce fait, il n'aurait pas hésité, sans doute, à placer en Babylonie l'origine tant de la division sexagésimale du cercle et du jour, que de la division sexagésimale, restée plus usuelle, du degré et de l'heure. Dans ses *Conclusions finales* (p. 361-362), M. Cantor arrive tardivement à cette pensée; mais il ne trouve, pour l'appuyer, que les remarques de M. Oncken sur l'emploi fréquent du nombre 60 et de ses multiples, comme nombres ronds, dans les récits qui viennent de la Babylonie. M. Cantor aurait pu remarquer aussi que 60, produit de 5 par 12, est le nombre des années d'un cycle chinois; que 5, 12 et 60 sont les nombres des années de trois cycles indiens, et que 60 est la base des grands nombres de la chronologie fabuleuse des Indiens et de celle des Babyloniens et des périodes de temps de ces deux peuples. Ces remarques sont importantes par l'appui qu'elles apportent à l'hypothèse si probable de MM. Lassen et Weber, d'après laquelle les chaldéens, par leurs rapports avec les Egyptiens et les Phéniciens d'une part, et avec les Indiens d'autre part, ont servi d'intermédiaires entre l'extrême orient et l'occident.

Voilà donc une lacune regrettable dans ce chapitre de M. Cantor. En revanche, si l'on compare, sur la notation cunéiforme des nombres entiers, ses tableaux (figures 9, 10 et 11) avec ceux de M. Pihan (p. 42-44), on remarque qu'ils les complètent sur un point important. Dans les uns comme dans les autres, le coin vertical avec la pointe en bas représente l'unité simple; le coin horizontal plus ou moins évidé à droite, et avec la pointe à gauche, représente la dixaine; le coin horizontal avec la pointe à droite représente la centaine, et chaque nombre au dessous de 10 et représenté par ce même nombre de coins verticaux diversement groupés. Mais, d'après une variante donnée par M. Cantor (Figure 11 et p. 31), et appuyée par l'autorité de MM. Hincks et Grotefend, dans les figures des nombres depuis 6 jusqu'à 9, cinq des unités sont quelquefois représentées par un seul coin vertical plus grand et placé à gauche des autres: ce qui constitue une *valeur de position* quintuple. D'un autre côté, dans les tableaux de M. Pihan, outre que les quatre ou cinq coins horizontaux représentant 10 ou 50 sont plus petits et d'une autre forme que le coin unique ou les deux ou trois coins horizontaux qui expriment 10, 20 et 30, les signes cunéiformes des nombres supérieurs de dixaines depuis 60 jusqu'à 90 représentent 50 par un grand coin vertical placé à gauche du coin ou des coins horizontaux qui expriment les dixaines simples ajoutées à 50, et ce grand coin vertical est pareil à celui qui exprime 5 quand il est placé à gauche des coins verticaux plus petits qui expriment les unités simples. Voilà donc une *valeur de position* cinquante fois égale à la valeur simple. Cette manière d'exprimer 60, 70, 80 et 90 est la seule que M. Pihan donne. M. Cantor (figure 11) la donne aussi, mais à titre de variante: dans son tableau principal (figure 9), chaque nombre de dixaines au dessous de 100 est représenté par ce même nombre de coins horizontaux ayant la pointe à gauche.

Ainsi suivant la remarque de M. Cantor (p. 31-32), la numération cunéiforme offre un signe qui a une valeur de position quintuple lorsqu'il est placé à gauche de signes d'unités simples, et une valeur de position égale 50 fois à sa valeur simple, lorsqu'il est placé à gauche de signes de dixaines. Il aurait été bon d'ajouter que la valeur de position des chiffres, entièrement étrangère à l'Egypte, se montre en Babylonie, où elle procède par 5 et par 50, et qu'elle a reçu tout son développement dans l'Inde, où elle procède par 10 et par les puissances de 10. Il aurait été bon de remarquer aussi que, suivant M. Lepsius 5), comme suivant M. Benlœw 6), le mot *cinq* dans les langues indo-européennes remonte à une racine qui signifie *main*.

4) Voyez M. Pihan, p. 42. — 5) Num. 33-38, p. 115-127, de la Dissertation citée ci-dessus, Introd., note 6. — 6) P. 18 de la Dissertation citée ci-dessus, Introd., note 7.

Ainsi, suivant M. Lepsius 7), de même que le nombre 4 avait été la première base du système duodécimal primitif des Egyptiens, auquel le système décimal était venu se substituer sans l'effacer entièrement 8), de même le nombre 5, qui est celui des doigts de chacune des deux mains, a été la première base du système décimal des peuples indo-européens. En effet, par exemple, dans la numération romaine par lettres, outre l'unité, les seuls nombres exprimés par une seule lettre sont, d'une part 5, 50 et 500, d'autre part 10 et quelques puissances de 10, et il en est de même dans la vieille notation numérale des Grecs par lettres majuscules initiales, telle qu'on la trouve sur les plus anciennes inscriptions grecques 9). M. Lepsius (p. 129) ajoute avec raison qu'en grec un verbe dérivé de la racine qui signifie *cinq*, le verbe πεμπάζειν, signifie *compter*.

Si M. Cantor avait connu et reproduit ces remarques, il aurait eu l'occasion toute naturelle d'y joindre la mention, qu'il a donnée avec moins d'àpropos dans son chapitre III (p. 41), non-seulement sur des systèmes de numération procédant par 5, par 10, ou par 20, mais sur d'autres systèmes procédant par 7, par 12, par 16 et par 18.

Sur la notation cunéiforme des nombres supérieurs à 99, M. Cantor (p. 29-31) présente quelques observations justes et importantes, qui manquent aux tableaux de M. Pihan. Le coin horizontal avec la pointe à droite et avec un coin vertical à gauche signifie 100; s'il y a plusieurs centaines, le nombre de ces centaines est exprimé par celui des coins verticaux, qui, placé à gauche de ce signe, ont la valeur d'un multiplicateur. De même, si le coin horizontal qui signifie 10 est placé à gauche des deux coins, l'un vertical, l'autre horizontal, qui signifient 100, ce groupe représente 10×100, c'est-à-dire 1000, et l'on met à gauche autant de coins verticaux qu'il y a de milliers. Si le coin horizontal qui signifie 10 est placé à gauche du groupe de coins signifiant 1000, le nombre représenté est 10000. En général, suivant la remarque de M. Cantor, dans la notation numérale cunéiforme, quand le signe d'un nombre d'ordre décimal inférieur est mis à droite d'un signe d'ordre décimal supérieur, la valeur du premier s'additionne avec celle du second; mais, si le premier est mis à gauche du second, il le multiplie. M. Cantor aurait dû rappeler qu'il y a une exception pour le coin vertical plus grand, qui à gauche de petits coins verticaux signifie 5, et à gauche de petits coins horizontaux ayant la pointe à gauche, signifie 50, et dont la valeur de position s'additionne avec la valeur des signes placés à droite. Du reste, M. Cantor a raison de conclure que les Babyloniens semblent avoir eu à un bien plus haut degré que les Egyptiens le sentiment des unités de différents ordres. En effet, nous avons vu que dans les signes numéraux des Égyptiens il n'y a pas de *valeur de position*, que l'*addition* domine surtout dans la notation numérale hiéroglyphique, et que la *multiplication* ne commence à s'y montrer que pour les nombres supérieurs à 10000. Mais, dans la notation hiératique et démotique des Egyptiens, la multiplication se montre déjà, concurremment avec l'addition, dans les signes des nombres de centaines, et de milliers.

M. Cantor dit ensuite que probablement la Babylonie, centre de commerce le plus important des temps antiques, devait avoir la *tablette à compter*, si répandue en orient et en occident, le *suan-pan* des Chinois, l'ἄβαξ des Grecs, l'*abacus* des Romains. Cette hypothèse est très probable, pourvu qu'il ne s'agisse que de l'abacus à boules ou à jetons 10). Mais nous verrons (chap. X), que M. Cantor prétend attribuer aux Babyloniens, soit les *apices* de Boèce avec les 9 chiffres, soit l'abacus dessiné pour recevoir dans ses colonnes les chiffres écrits: c'est là une hypothèse que rien n'autorise.

M. Cantor remarque que, suivant M. Layard, outre l'écriture cunéiforme, qui allait de gauche à droite, les Assyriens avaient une écriture cursive qui allait de droite à gauche, et dans laquelle pour exprimer les nombres, ils paraissent avoir employé des chiffres analogues à ceux des Egyptiens. C'est là un fait à vérifier, mais vraisemblable d'après ce que nous avons dit (chap. I) et ce que M. Cantor aurait bien fait de dire, sur la longue domination des Egyptiens aux bords de l'Euphrate.

---

7) P. 183-184 de la Dissertation citée. — 8) Voyez dans le chapitre précédant le rapport de ce nombre 4 avec les mois des saisons égyptiennes. — 9) Voyez ci-après, chap. VIII et XI. — 10) Voyez ci-après, chap. IX.

S'emparant d'une tradition d'après laquelle la théorie du nombre *moyen proportionnel armonique* aurait été inventée en Babylonie, d'où Pythagore l'aurait apportée en Grèce 11), M. Cantor incline à penser que les Babyloniens avaient fourni au moins les éléments des spéculations sur les nombres développées par Nicomaque de Gérase. Mais c'est là une pure conjecture, fondée sur une tradition bien douteuse.

Sur l'importance de la Métrologie babylonienne, M. Cantor se réfère aux savantes recherches de M. Bœckh, à côté desquelles il aurait pu citer l'ouvrage plus récent et beaucoup plus étendu de M. Vazquez Queipo.

M. Cantor fait une simple allusion à l'astronomie des Chaldéens et à l'application qu'ils y faisaient de l'arithmétique comme les Egyptiens y appliquaient la géométrie, suivant un texte de l'*Astronomie* de Théon de Smyrne.

III. Les Chinois. 1)

Après avoir résumé brièvement le caractère et l'histoire de la langue monosyllabique si pauvre des Chinois et de leur écriture idéographique si riche, M. Cantor remarque avec raison que, ne pouvant représenter phonétiquement les noms de nombre, ce peuple dut dès l'origine les représenter par des chiffres, et que ces chiffres durent lui appartenir en propre, à moins qu'ils ne lui vinssent de quelques peuples dépourvus, comme lui, d'alphabet, tels que les Astèques et les Muyscas du nouveau continent. Mais il incline à croire, avec M. Alexandre de Humboldt, qu'au contraire ces peuples américains devaient leurs chiffres aux Chinois.

Quoique la langue des Chinois et leur écriture soient indépendantes l'une de l'autre, cependant, comme le montre M. Cantor, leur ancien système de numération écrite répondait exactement à leur système de numération parlée. Tous deux sont exactement décimaux. Les dix premiers nombres sont exprimés chacun par un mot et par un chiffre, et il en est de même des puissances de 10. Quand le nom ou le chiffre d'un des dix premiers nombres est placé avant le nom ou le chiffre de 10 ou d'une de ses puissances, il le multiplie; quand il est placé à la suite, il s'additionne avec lui. L'écriture chinoise, pour les anciens chiffres comme pour les autres caractères, procède par colonnes verticales, qui se lisent de haut en bas, et qui se succèdent de gauche à droite. Ce système offre plusieurs variétés, omises par M. Cantor 2), mais données par M. Pihan 3).

De plus, il y a deux systèmes de nouveaux chiffres chinois, qui se lisent horizontalement, en mettant à gauche les unités de l'ordre le plus élevé, comme dans l'écriture cunéiforme. Le premier système est celui des chiffres de commerce, qui ne s'impriment jamais: ils s'écrivent de telle sorte qu'à gauche ou au dessus des chiffres exprimant 10, 100, 1000 et les autres puissances de 10, se trouve le chiffre exprimant le nombre de dixaines, de centaines, de milliers, etc., et que le zéro, sous la forme d'un cercle, remplace les ordres d'unités décimales qui manquent dans le nombre total. Jusqu'ici M. Cantor et M. Pihan sont d'accord sur ce système chinois des chiffres de commerce 4). Mais M. Cantor ajoute que, si les unités simples manquent, on est libre de ne pas exprimer 10, et le chiffre marquant le nombre des dixaines est reconnu pour tel, par cela seul qu'il est couché sur le côté et que le zéro ne s'interpose pas entre lui et le chiffre des centaines. On voit donc poindre ici la valeur de position, puisque le chiffre qui signifie 2, par exemple, est pris pour 20, lorsque, couché sur le côté, il vient immédiatement, de gauche à droite, après le chiffre des centaines, au lieu d'en être séparé par les dixaines ou par un zéro. M. Cantor con-

11) Voyez Jamblique, *Commentaire sur l'arithmétique de Nicomaque*, p. 168, ed. Tennulius (Arnheim, 1668, in-4.) Comparez Théon de Smyrne, *Astronomie*, chap. 30, p. 272 de mon édition (Paris, 1849, in-8.). — 1) *Die Chinesen*, p. 39-62 de M. Cantor — 2) Voyez les figures 12 et 13 de M. Cantor. — 3) Les chiffres ordinaires de ce système, ceux qu'on trouve habituellement dans les ouvrages imprimés, sont les chiffres *Kiai-Chôu*, que M. Pihan (p.2-3) donne sous deux formes, et M. Cantor (figure 12) sous la première forme seulement. M. Pihan donne de plus les chiffres cursifs *Tsao* (p.2), et les vieux chiffres *Tchhouan* sous leurs deux variétés (p.9-11). — 4) Voyez M. Cantor, p. 45-48 et figure 14, et M. Pihan p. 5-7.

sidère ce système usuel comme une transition entre l'ancien système et le nouveau système à l'usage des savants. Mais c'est plutôt une sorte de compromis populaire entre l'ancien système et le système nouveau, venu de l'étranger.

Ce dernier système, que M. Cantor décrit d'après MM. Edouard Biot et Biernatzki, est celui des *barres numérales* 5). Les cinq premiers nombres y sont exprimés par 1, 2, 3, 4 et 5 barres toutes verticales ou toutes horizontales, et les quatre nombres suivants sont exprimés par une barre horizontale ou verticale, qui vaut 5, et qui est superposée à 1, 2, 3 ou 4 barres toutes verticales ou toutes horizontales, dont chacune vaut une unité. Ensuite ces 9 chiffres, formés chacun d'un groupe de barres, s'emploient avec le zéro et avec une valeur de position toute pareille à celle des chiffres indiens et des nôtres.

Il y a évidemment dans ce système deux éléments, bien distincts : 1° pour les nombres jusqu'à 9 inclusivement, les combinaisons des barres numérales sont analogues à celles de la notation numérale hiéroglyphique des Egyptiens et de la notation numérale cunéiforme des Babyloniens 6); 2° pour le nombres au dessus de 9, tout se réduit à l'emploi des 9 groupes de barres, avec valeur de position pour chaque groupe et avec le zéro. Le premier élément n'offre qu'une extension du procédé appliqué à l'expression des trois premiers nombres dans les anciens systèmes *Kiài-Chòu* et *Tchouan* des Chinois 7) et dans le vieux système indien de Guzarate 8), et à l'expression des neuf premiers nombres dans le système hiéroglyphique des Egyptiens et dans le système cunéiforme des Babyloniens. Ce premier élément ne s'adapte que difficilement avec la valeur de position, qui s'arrangerait beaucoup mieux d'un signe unique pour chacun des neuf premiers nombres. Quant au second élément, qui consiste précisément dans la valeur de position et dans le zéro, M. Reinaud 9) a établi que c'est un emprunt fait aux Indiens par les Chinois.

En vain Biernatzki, combattu trop faiblement par M. Cantor, insinue que, pour la numération écrite avec valeur de position, les Chinois ont la priorité sur tous les autres peuples, parce qu'ils l'ont sur les Arabes. Les exemples qu'on cite de ce système chez les Chinois ne remontent pas au delà du VIIe siècle de notre ère, tandis que les exemples du système indien remontent, comme nous le verrons, jusqu'au Ve. On objecte que l'existence du signe compliqué *ling* signifiant zéro 10) dans l'ancien système *Kiài-Chòu* des Chinois prouve l'usage de la valeur de position, même dans cet antique système. Mais il est certain que les puissances de 10 y étaient exprimées par des signes particuliers sans valeur de position, et M. Cantor a raison de répondre que le signe *ling* y pouvait servir à exprimer isolément une quantité nulle, comme en grec l'ο, lettre initiale du mot οὐδὲν 11).

Ensuite M. Cantor fait justice d'une fausse hypothèse, qu'il avait autrefois acceptée lui-même. Leibniz, ce grand génie, qui avait ses chimères, considérait non-seulement comme un symbole de la *création ex nihilo*, mais comme une preuve irrécusable de ce grand acte de Dieu, le système binaire, qui, avec l'unité, le zéro et la valeur de position, peut exprimer tous les nombres imaginables. Les Chinois nomment *Kouas* des symboles composés de deux éléments, qui sont une ligne droite continue et une ligne droite interrompue au milieu. Or, dans ces deux éléments des *Kouas* attribués à Fohi, c'est-à-dire à l'un des plus anciens rois de la Chine, le P. Bouvet, correspondant de Leibniz, prétendait reconnaître l'unité et le zéro du système binaire. Mais cette hypothèse, accréditée par Leibniz parmi les mathématiciens, est depuis longtemps et à bon droit rejetée par les sinologues, qui savent que les *huit Kouas*, formés de deux éléments contraires, étaient un symbole physique et non un système de chiffres 12).

Quant au *Suan-pan* des Chinois, instrument de calcul, composé de boules enfilées, dont chaque rangée avait une valeur de position, M. Cantor en parlera plus loin (chapitre IX).

5) Voyez M. Cantor, p. 48-48 et figures 15-16, et M. Pihan, p. 7-9. — 6) Comparez ce que nous avons dit ci-dessus, chapitres I et II. — 7) Voyez M. Pihan, p. 8 et 10, et M. Cantor, figure 12. — 8) Voyez le tableau dressé d'après M. Thomas par M. Pihan, p. 66. — 9) *Académie des inscriptions*, t. 18, 2 partie, p. 301. — 10) Figure 12 de M. Cantor, qui a suivi Abel Rémusat. — 11) Voyez ci-après, chap. VIII. — 12) Voyez Visdelou, *Notice sur l'Y-King*, dans les *Livres sacrés de l'Orient* publiés par M. Pauthier, p. 137-148 (Paris, 1840, gr. in-8. à deux colonnes et Windischmann. *die Philosophie im Fortgang der Weltgeschichte*, 1 partie (seule parue): *Die Grundlagen der Philosophie in Morgenland*, livre I, p. 135-173, 181-162, 306, 317, etc., (Bonn, 1827-1834, in-8.).

M. Cantor termine ce chapitre d'une manière malheureuse, en citant la découverte de porcelaines avec inscriptions chinoises, trouvées dans les antiques tombeaux de l'Egypte et en Babylonie: avec M. Wilkinson, il croit à la haute antiquité de ces porcelaines. C'est là une pierre d'attente que M. Cantor pose, pour bâtir plus tard son hypothèse de communications directes et très antiques de la Chine avec la Babylonie et avec l'Egypte. Mais M. Layard avait déjà remarqué que ces porcelaines ressemblent trop aux porcelaines modernes des Chinois. Elles ont été sans doute apportées en Egypte et en Babylonie par les Arabes mahométans; car, dans une note lue à l'Académie des inscriptions et belles-lettres en 1851, M. Stanislas Julien a prouvé que l'invention de la porcelaine chez les Chinois est postérieure au commencement de l'ère chrétienne 13).

IV. Les Indiens. 1)

Arrivant à l'Inde antique, M. Cantor commence par déclarer qu'il ne veut pas s'occuper des populations dravidiennes, mais seulement des Aryas, qui, arrivés dans l'Inde 1400 ans environ avant notre ère, parlaient la langue sanskrite. Sur cette langue, dont la forme la plus ancienne est la langue védique, M. Cantor donne un aperçu historique, qu'il aurait pu rendre plus exact et plus complet, s'il avait consulté la savant ouvrage de M. Max Müller 2) sur la partie religieuse de la vieille littérature indienne.

Comme sources de l'histoire de la numération écrite des Indiens, M. Cantor indique, d'une part les inscriptions, dont les plus anciennes remontent dit-il, à deux siècles et demi avant notre ère, d'autre part les ouvrages mathématiques écrits dans la langue sanskrite, devenue langue savante et non usuelle vers le III[e] siècle de notre ère.

Suivant M. Cantor, le plus ancien des écrivains indiens sur les mathématiques serait Aryabhatta, auquel il croit pouvoir assigner pour époque, d'après un renseignement fourni par M. Wish, le commencement du VI[e] siècle de notre ère. Mais l'astronome indien Varaha-Mihira écrivait vers l'an 500, comme des textes de ses ouvrages le prouvent, et il est certain qu'Aryabhatta lui est antérieur. Aryabhatta n'est donc pas postérieur au V[e] siècle. D'un autre côté Aryabhatta est postérieur à la rédaction du *Sourya-Siddhânta*, sur lequel il y a laissé un commentaire. Or, des raisons qu'il serait trop long de développer ici, prouvent que ce célèbre traité astronomique, dont il nous reste une rédaction un peu altérée 3), ne peut guère être antérieur au V[e] siècle de notre ère. C'est donc au V[e] siècle, ni avant, ni après, qu'Aryabhatta doit être placé. Mais le *Sourya-Siddhânta* existait avant lui, puisqu'il l'a commenté. Il n'est donc pas le plus ancien écrivain indien sur les mathématiques, mais seulement le plus ancien dont on sache le nom.

Ensuite M. Cantor aurait dû dire que *Sourya-Siddhânta* et les autres *Siddhântas* anonymes, qu'on disait révélés par les dieux, et les œuvres d'Aryabhatta au V[e] siècle, de même que celles de Brahmagupta au VII[e] siècle et de Bhascara Acharya au XII[e] 4), portent les traces irrécusables d'emprunts faits à la langue grecque et à la science grecque d'Alexandrie. C'est là un fait important, qui ne peut plus être contesté, et que M. Albrecht Weber, entre autres, a mis dans tout son jour 5). Un seul des traités scientifiques in-

par l'origine dell' era Indiana

13) Voyez l'*Athenæum* français, n. du 24 juin 1854. — 1) *Die Inder*, p. 59-60 de M. Cantor. — 2) *History of ancient sanskrit literature, so far as it illustrates the primitive religion of the brahmans*. Second ed. revised. 1860, in-8, 607 pages. — 3) Le texte du *Sourya-Siddhânta*, avec un ancien commentaire sanskrit, a été publié à Calcutta par M. Fitz Edward Hall, dans les nn. 79, 105, 115 et 146 de la *Bibliotheca indica*. J'ai sous les yeux deux traductions anglaises complètes du *Sourya-Siddhânta*: l'une faite par M. Burgess et imprimée avec un ample commentaire de M. Whitney, à New-Haven dans le Connecticut, 1860, in-8, de 254 pages; l'autre faite par le pandit Bapu Deva Sastri et publiée dans la *Bibliotheca indica*, new series, n. 1, Calcutta, 1860, in-8, de 99 pages. — 4) J'ai sous les yeux la traduction anglaise du *Siddhânta Siromani* de Bhascara, faite par M. Lancelot Wilkinson et par le pandit Bapu Deva Sastri, et publiée dans la *Bibliotheca indica*, new series, nn. 13 et 28, Calcutta, 1862, in-8., p. 101-260, faisant suite au *Sourya-Siddhânta*. — 5) *Academische Vorlesungen über die indische Literaturgeschichte*, p. 220-234 (Berlin, 1852, in-8.).

+Weber

diens qui nous restent est étranger à l'influence grecque: c'est le *Calendrier des Védas* 6). Mais il porte la trace certaine d'une influence babylonienne, et c'est encore là un fait important que M. Weber 7) a constaté et que nous rappellerons plus tard.

Mais revenons à M. Cantor et à la numération indienne. Dans cette numération, il y a deux choses à considérer, savoir: 1° les figures représentant les nombres; 2° la valeur de position attribuée à ces figures. Or les Indiens avaient un système de dix chiffres (y compris le zéro), qui, avec la valeur de position, leur servaient à exprimer tous les nombres, et au VIIIe siècle ils ont communiqué ce système aux Arabes orientaux. Quelle est, chez les Indiens l'origine de ces chiffres, et en sont-ils les inventeurs? Voilà une première question à résoudre. Puis une seconde question toute semblable se présente pour la valeur de position. M. Cantor a traité ces deux questions suivant cet ordre, mais en les mêlant un peu ensemble. Pour montrer qu'elles sont bien distinctes, et que la solution de l'une n'entraîne pas celle de l'autre, je vais présenter ici quelques considérations préliminaires.

M. Alexandre de Humboldt 8) a remarqué que la numération indienne par neuf chiffres avec le zéro et la valeur de position n'a pas été apportée de l'Iran sur le sol de Inde par les Aryas orientaux parlant la langue sanskrite, puisqu'on n'en trouve pas de traces chez les Aryas occidentaux parlant la langue zende. En outre, M. Max Müller 9) a prouvé que jusqu'à l'époque des conquêtes d'Alexandre l'écriture n'était pas employée dans l'Inde pour les œuvres littéraires, et que les Védas, les brahmanas, de grands poèmes didactiques, des traités de grammaire, etc., étaient transmis uniquement par la mémoire des brahmanes et par leur prodigieuse éducation mnémonique, dont la description nous a été conservée. Le même savant a montré que pourtant l'écriture sur pierre, sur métal et sur papier de coton, pour certains usages de la vie civile et domestique, existait dans l'Inde avant l'époque d'Alexandre, mais que probablement elle n'y remontait pas au delà du commencement de la période littéraire des *Soutras*, qui avait succédé, vers 600 ans avant notre ère, à celle des *brahmanas*, postérieure elle-même à celle des *Mantras* ou recueils védiques, qui, comprise à peu près entre l'an 1000 et l'an 800 avant notre ère, avait été précédée de celle des *Chandas*, c'est-à-dire de la composition successive des hymnes antiques du *Véda*. Ainsi, trois siècles avant notre ère, l'usage de l'écriture était encore très restreint dans l'Inde, et six siècles avant notre ère il y était probablement inconnu. Cependant les Indiens, comme certains peuples de l'Amérique, pouvaient avoir des chiffres, avant des posséder l'usage de l'écriture.

D'ailleurs, sans employer des chiffres, les Indiens pouvaient calculer à l'aide de l'*abacus* à boules, que nous avons rencontré en Chine sous le nom de *Suan-pan*, dont l'existence à Babylone est au moins vraisemblable, et dont nous constaterons bientôt l'usage en occident 10). Or, dans cet instrument, chacune des boules enfilées représentait une unité, mais ces unités étaient de différents ordres décimaux suivant les rangées auxquelles les boules appartenaient. Il est donc possible que la notion de la valeur de position ait été plus ancienne dans l'Inde que l'emploi des chiffres et de l'écriture. Cette notion aurait donc pu être appliquée par les Indiens aux chiffres dès l'époque où ils auraient commencé d'en avoir, s'ils avaient eu tout de suite la pensée d'en fixer le nombre à 9, et d'y joindre le zéro. Mais nous verrons qu'ils paraissent avoir eu d'abord des chiffres plus nombreux, auxquels la valeur de position et le zéro étaient étranger.

Réciproquement les neuf chiffres indiens, avec des figures à peu près semblables et comme représentant les neuf premiers nombres, auraient pu appartenir d'abord chez les Indiens à un système de chiffres

---

6) J'ai sous les yeux le texte et la traduction allemande du *Calendrier des Védas*, publiés avec un ample commentaire par M. A. Weber (Extrait des Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1862, in-4., 130 pages). — 7) *Ueber den Vedakalender*, p. 14, 15, 28, 29 et 30. Comparez le même auteur, *Ueber die vedischen Naxatra*, I Theil (Ac. des sciences de Berlin, 1861), p. 296. 302, 307 et 308. — 8) *Ueber die bei verschieden Vœlkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen* (dans le Journal de mathématiques de Crelle, 1829, t. 4, p. 205 et suiv.), et *Cosmos*, t. 2, II partie, ch. 6, note 19, p. 153 de la traduction française. — 9) *History of ancient sanskrit literature*, second ed., chap. 3, p. 497-521. Voyez aussi M. Westergaard, *Ueber den ældesten Zeitraum der indischen Geschichte*, p. 30-44, traduction du danois en allemand, Breslau, 1862, in-8. — 10) Voyez ci-dessus, chap. II et III, et ci-après, chap. IX et X.

Lungo tempo dopo Buddha la sua dottrina non si diffuse che in forma orale (W. Wassiljeff p. 19 e p. 26-27); questo conchiude esser rimasta ignota per molti secoli posteriori a Budda la scrittura agli Indiani e congettura esser loro venuta dai Greci di Battra (p. 28)

plus nombreux et sans zéro ni valeur de position, et les autres chiffres du même système auraient pu disparaître, quand l'invention du zéro et de la valeur de position serait venue les rendre inutiles. Mais nous verrons que les neuf chiffres indiens auxquels la valeur de position est attachée n'appartenaient au système des chiffres employés par eux sans valeur de position.

Un système de chiffres avec valeur de position et un autre sans valeur de position peuvent coëxister chez un même peuple. Ainsi chez nous les chiffres romains sont restés pour certains usages, malgré l'emploi plus commode de ceux qu'on appelle *arabes*. De même, dans l'Inde, pour exprimer les nombres, Aryabhatta employait des combinaisons des lettres dans lesquelles les voyelles jouaient le rôle de multiplicateur, sans valeur de position 11), et cependant la valeur de position était bien connue d'Aryabhatta; car il avait commenté le *Sourya-Siddhânta* 12): or, dans ce poème astronomique, la valeur de position est appliquée à des mots symboliques qui y sont toujours employés pour remplacer les neuf chiffres et le zéro 13); et ces chiffres eux-mêmes étaient en usage à l'époque de la rédaction du *Sourya-Siddhânta;* car le mot symbolique *anka*, dont le sens propre est *signe numéral*, s'y trouve mis 14) pour exprimer le nombre 9, parcequ'il a neuf signes numéraux 15).

Après ces réflexions, utiles pour diriger notre marche et pour suppléer à des omissions de M. Cantor, abordons avec lui la question de l'origine des neuf chiffres indiens et du zéro. M. Cantor remarque, après M. Rask, que les savants de Ceylan ont 20 chiffres, savoir: un pour chacun des neuf nombres au dessus de 10, un pour chacun des neuf nombres de dixaines, un pour 100 et un pour 1000, et qu'ils n'emploient ni la valeur de position ni le zéro, mais que les neuf signes des unités simples leur servent comme multiplicateur pour exprimer les nombres de centaines et de milliers 16). M. Cantor suppose que ces chiffres et ce système de numération ont été portés de l'Inde à Ceylan avec le bouddhisme, et il est tenté d'en conclure que l'invention de la valeur de position dans l'Inde doit être plus récente que l'introduction du bouddhisme à Ceylan, c'est-à-dire que le milieu du III[e] siècle avant notre ère 17). Mais, quand bien même le fait de cette importation de chiffres indiens serait vrai, cette conclusion ne serait pas légitime, puisqu'un autre système de chiffres aurait pu coëxister dans l'Inde. D'ailleurs, un fait dont M. Cantor aurait dû s'enquérir, prouve que ces chiffres de Ceylan n'ont pas été importés dans cette île par les bouddhistes indiens: ces chiffres, employés dans les livres en langue singhalaise, ne le sont jamais en pali, c'est-à-dire précisément dans la langue sacrée du bouddhisme, langue que les bouddhistes indiens ont importée dans l'île 18).

En pali, les noms de nombre sont souvent écrits tout au long, ou bien ils sont exprimés quelquefois par des mots symboliques qui remplacent les chiffres avec valeur de position. Mais surtout, comme M. Prinsep 19) le dit fort bien, dans le pali, de même que dans le sanskrit et dans les autres langues qui en dérivent, le mode prédominant et le plus ancien d'exprimer les nombres consistait, comme en grec et en latin, dans l'emploi de lettres rangées suivant un ordre alphabétique.

---

11) Voyez M. Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. 2, p. 1138-1141.— 12) Voyez Wilson, cité par M. Lassen, *Ind. Alt.*, p. 1137. — 13) Voyez la traduction anglaise de M. Burgess, *Introductory note*, p. III, et pour plus de détails M. Wœpcke, *Memoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 113-115 (Paris, 1863, in-8), et M. Guérin, *Astronomie indienne*, chap. XII, p. 138-140 (Paris, 1847, in-8.). — 14) *Sourya-Siddhânta*, I, 30, 31, 37, 38, 42; II, 17, 20, 25; III, 43; XII, 85, 87 et 89.— 15) Voyez M. Wœpcke, *Mem sur la prop. des chiffres ind.*, p. 113-115, et comparez l'explication de ce mot *anka* dans Albirouni cité par M. Wœpcke, p 94.— 16) Voyez M. Pihan, p. 138-141. — 17) M. Cantor (p. 59), à l'exemple de M. Brockaus, place cet événement au V. siècle avant notre ère. Mais M. Benfey (art. *Indien* dans l'Encyclopédie d'Ersch et Gruber) le place avec raison deux siècles plus tard. En effet, l'introduction du bouddhisme à Ceylan eut lieu l'année qui suivit celle du concile bouddhique de Pataliputra. Or, le roi Açoka, sous lequel fut tenu ce concile, était contemporain d'Antiochus (Théos), roi de Syrie, de Ptolémée (Philadelphe), roi d'Egypte, d'Antigone (Gonatas), roi de Macédoine, de Magas, roi de Cyrène, et d'Alexandre (II), roi d'Epire. Voyez l'inscription de Kapour-di-Giri, expliquée par le savant danois M. Westergaard, *Ueber Buddha's Todesjahr*, traduction allemande (Breslau, 1862, in-8). — 18) Voyez M. Pihan, p. 141-144. — 19) *Examination of the inscriptions of Girnar in Gujerate and Dhauli in Cuttack (Journal of the asiatic society of Bengal*, avril 1838, p. 348). Voyez le passage traduit par M. Wœpcke, *Memoire sur la propagation des chiffres indiens*, p 44-46 (Paris, 1863, in-8).

Nous allons voir que vers le nord de l'Inde, dans le Guzarate, des chiffres sans valeur de position étaient employés jusqu'au IVe siècle de notre ère. Mais ce fait ne prouve pas que, pour d'autres usages, une numération par neuf chiffres, avec la valeur de position et le zéro, ne fût pas connue alors dans le Guzarate même, ni surtout qu'une telle numération fût inconnue dans l'Inde entière.

Revenons à M. Cantor. Sur des monnaies et des plaques de cuivre gravées par ordre des satrapes de Sourachtra dans le Guzarate au IVe siècle de notre ère, M. Prinsep avait cru découvrir un système composé de 9 chiffres et du zéro, mais avec des variantes pour chaque chiffre 20), et il avait trouvé une ressemblance entre ces figures et les lettres initiales sanskrites des noms des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, et du zéro (*Çounya*), telles que ces lettres étaient formées dans des alphabets indiens des premiers siècles de notre ère 21). M. Cantor (p. 64-65) veut que MM. Thomas et Stevenson aient confirmé, mais complété, l'œuvre de M. Prinsep, en trouvant de plus, sur ces mêmes plaques et monnaies, des chiffres pour les neuf nombres de dizaines, pour des nombres de centaines et pour le nombre 1000, et en y reconnaissant de même les initiales des noms de nombre correspondants. Il y a du vrai et du faux dans cet exposé de M. Cantor sur les découvertes de MM. Thomas et Stevenson. Il est vrai que ces deux savants ont cru pouvoir confirmer le fait général de la ressemblance de ces chiffres avec les lettres initiales des noms de nombre correspondants. Mais, comme nous le verrons tout-à-l'heure, ils ont changé la plupart des valeurs numérales assignées par M. Prinsep aux figures qu'il avait recueillies, et là où M. Prinsep avait cru trouver un système de 9 chiffres avec le zéro, MM. Thomas et Stevenson ont montré qu'il y avait un système de chiffres beaucoup plus nombreux, sans zéro et sans valeur de position 22). M. Cantor (p. 64-65) reconnaît que tel est le caractère de cette vieille notation numérale du Guzarate, et il conclut (p. 59) que ces vieux chiffres indiens devaient être identiques aux chiffres singhalais dépourvus de valeur de position, dont l'importation à Ceylan a été attribuée faussement par lui aux bouddhistes indiens. Mais la comparaison que, faute de documents, M. Cantor n'avait pas pu établir entre les figures des deux systèmes des chiffres, en montre la différence complète 23).

Mieux renseigné que M. Cantor sur tous ces systèmes de chiffres, M. Wœpcke 24) arrive pourtant, si je ne me trompe, à une conclusion beaucoup plus erronée. Il veut que le neuf chiffres indiens modernes, avec valeur de position, soient nés d'une transformation des neuf premiers chiffres des satrapes de Sourachtra, et que ceux-ci étant dérivés des lettres de l'alphabet sanskrit, les figures des neuf chiffres indiens empruntés à l'Inde par les Arabes orientaux soient certainement toutes originaires de l'Inde. Mais comment s'y prend-il pour établir l'identité des neuf vieux chiffres de Sourachtra, d'une part avec les initiales prises dans les vieux alphabets sanskrits, d'autre part avec les neuf chiffres du système indien lié au zéro et à la valeur de position? Voilà ce qu'il s'agit d'examiner.

M. Wœpcke (p. 45-47) prend son point de départ dans le tableau dressé par M. Prinsep, qui avait cru trouver sur des monnaies et des plaques gravées de Sourachtra un système de neuf chiffres avec le zéro et la valeur de position. Cependant il est forcé d'avouer (p. 46, note 1) que le savant M. Edward Thomas, dans son édition des œuvres de M. Prinsep, a nié avec raison la valeur de position de ces chiffres et l'existence du zéro dans ces inscriptions de Sourachtra. Mais M. Wœpcke prétend que les conclusions de M. Prinsep sur le rapport de ses neuf chiffres avec les initiales sanskrites subsistent dans toute leur force. Il me semble que c'est beaucoup trop dire. Car il suffit de jeter un coup d'œil sur les tableaux comparatifs que M. Pihan (p. 63-65) a reproduits, des chiffres de Sourachtra tant d'après M. Prinsep que

20) Voyez M. Pihan, *Exposé* etc., Introd., p. XVIII-XIX, note 2 de la p. XVIII. — 21) Voyez M. Prinsep, dans l'article cité (note 13), *Journal of the asiat. soc. of Bengal*, avril, 1838, p. 348-354; les Œuvres de M. Prinsep publiées par M. Edward Thomas (*Essays on indian antiquities, historic, numismatic and palæographic*, of the late James Prinsep, to wich are added his *Useful* tables, etc. London, 1858, 2 vol. in-8), t. 2, p. 72-84, et planches XL et XL *a*; et la reproduction de ces deux planches par M. Pihan, Introd., p. XIX, note 2 de la p. XVIII, et p. 63-65. — 22) Voyez M. Pihan, p. 63-65. — 23) Voyez M. Pihan, p. 65 et p. 141. — 24) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 45-67 (Paris, 1863, in-8.).

d'après MM. Thomas et Stevenson, pour voir que, par suite des rectifications apportées par ces deux savants, la plupart des neuf chiffres de M. Prinsep changent de signification. Ainsi non-seulement on voit que des chiffres pris par M. Prinsep pour 2, pour 7, pour 8 et pour 9, signifient 20, 70, 80 et 90, et qu'un chiffre pris par lui pour 3 signifie 300; mais, de plus, on voit que le chiffre pris par lui pour 1 vaut 30, que l'une des deux formes attribuées par lui au 2 est une variante du chiffre signifiant 30, que l'une de ses deux formes du 4 est un 8, que sa forme unique du 6 vaut 10, que l'une de ses deux formes du 9 vaut 60, et qu'il n'a rencontré tout-à-fait juste que pour trois chiffres signifiant 4, 5 et 10. D'un autre côté, on voit que, dans le tableau des chiffres expliqués par M. Thomas, le 1, le 2 et le 3 sont figurés par une, deux et trois barres parallèles, comme dans l'écriture hiéroglyphique des Egyptiens et comme dans le système des barres numérales des Chinois, et il me paraît difficile de trouver un rapport marqué entre les figures des chiffres de MM. Thomas et Stevenson pour les six nombres suivants, et les initiales des noms de nombre correspondants dans tel alphabet sanskrit qu'on voudra choisir. Si donc MM. Thomas et Stevenson ont raison, les lettres sanskrites auxquelles certains vieux chiffres de Sourachtra ressembleraient suivant M. Prinsep 25), ne sont pas les initiales des nombres exprimés réellement par ces chiffres: si, par exemple, le chiffre qui vaut 6 suivant M. Prinsep, mais qui vaut 10 suivant M. Thomas, ressemble à la fois aux vieilles lettres initiales sanskrites des mots *shash* (six) et *daças* (dix), il faut que ces ressemblances soient d'une élasticité bien complaisante.

Supposons pourtant que les vieux chiffres de Sourachtra pour les neuf premiers nombres soient des initiales sanskrites plus ou moins altérées: il resterait à prouver l'identité de ces vieux chiffres dépourvus de valeur de position avec les neuf chiffres indiens auxquels la valeur de position est attachée, et, pour établir cette identité, il faudrait pouvoir montrer entre ces deux systèmes de neuf chiffres une ressemblance qui, j'ose le dire, n'existe pas. M. Wœpcke (p. 47) n'a pas même essayé cette démonstration impossible.

Pour arriver au même but, il a pris un autre chemin (p. 47-53), dans lequel nous allons le suivre. D'après une remarque incontestable de ce savant (p. 53-67), les chiffres *gobâr* des Arabes occidentaux sont bien plus semblables aux nôtres que les chiffres indiens empruntés par les Arabes orientaux du VIIIe siècle, et surtout que les chiffres indiens d'une époque plus récente. Le même savant pense, comme nous le verrons (chap. XVII), que les chiffres *gobâr* sont les chiffres indiens sous la forme qu'ils avaient au IIe siècle de notre ère, et que ces chiffres, transmis alors de l'Inde aux Néopythagoriciens d'Alexandrie, ont passé de là aux peuples latins de l'occident et de ceux-ci aux conquérants arabes. Or M. Wœpcke (p. 49) réunit en un tableau synoptique: 1° les initiales sanskrites du IIIe siècle pour les noms des neuf premiers nombres et du zéro; 2° les formes les plus anciennes de nos chiffres d'après un manuscrit de Boèce du XIe siècle; 3° les chiffres gobâr des Arabes occidentaux; 4° les chiffres indiens des Arabes orientaux du Xe siècle. Entre la seconde ligne de ce tableau et la troisième, il y a presque identité; entre ces deux lignes et la quatrième, il y a ressemblance évidente pour les chiffres 1, 2, 3, 4, 9 et 0, mais pour ceux-là seulement; et non pour les chiffres 5, 6, 7 et 8. Entre la première ligne et les trois autres, il y a très peu de ressemblance. Il faut donc conclure que vraisemblablement ni les chiffres indiens pour les nombres 1, 2, 3, 4, 9 et pour le zéro, chiffres identiques aux chiffres *gobâr* correspondants, ni les chiffres indiens pour les nombres 5, 6, 7 et 8, chiffres très différents des chiffres gobâr, ne viennent des lettres sanskrites initiales des noms de nombre. Ainsi cette comparaison tourne contre l'hypothèse qu'elle devait confirmer. Mais il y a contre cette hypothèse quelque chose de plus décisif. Nous allons prouver que, bien loin d'être tous des lettres de l'alphabet sanskrit plus ou moins modifiées, les neuf chiffres indiens, ou du moins cinq d'entre eux, ont une origine étrangère aux populations qui parlaient la langue sanskrite.

Rappelons-nous que chez les Egyptiens, parmi les neuf premiers nombres ordinaux des jours du mois, il n'y a en a que cinq qui soient exprimés chacun par un signe unique dans l'écriture hiératique, savoir,

---

25) La plupart des ressemblances sont loin de me paraître frappantes. Voyez le tableau comparatif, figure 23 des planches de M. Cantor.

les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, chacun des quatre autres nombres ordinaux de jours étant exprimé par la réunion de deux quatre premiers signes 26). Or nous venons de voir que les nombres 1, 2, 3, 4 et 9 sont précisément ceux pour lesquels les chiffres indiens des Arabes orientaux du X[e] siècle, et même les chiffres sanskrits modernes, sont très semblables à ceux des manuscrits de Boèce et à ceux du système gobâr des Arabes occidentaux. Pour les figures hiératiques des nombres ordinaux 2 et 3 la ressemblance avec les chiffres indiens et avec les nôtres va presque jusqu'à l'identité; il en est de même pour une des deux formes hiératiques du chiffre ordinal 4; pour le nombre 9, il y aurait de même presque identité, si la queue du chiffre égyptien n'allait pas de gauche à droite, au lieu d'aller de droite à gauche; pour le chiffre 1, la ressemblance est grande 27). Dans la notation hiératique des cinq mêmes nombres pris comme cardinaux, les formes sont un peu altérées, et quelques unes des ressemblances sont moindres 28).

Or il est impossible d'attribuer au hasard cette ressemblance si grande que ces cinq chiffres ordinaux pour les jours du mois, les seuls chiffres employés dans la notation hiératique égyptienne pour les nombres de jours au dessous de 10, présentent tous avec les chiffres correspondants chez les Indiens. D'un autre côté, ces cinq figures étant arbitraires, leur invention par deux peuples différents ne pourrait s'expliquer ni par l'identité des procédés naturels de l'esprit humain, ni par la nature même de ces figures et de ces nombres. Ainsi, d'après les principes que nous avons posés dans l'*Introduction*, il faut reconnaître que ces cinq chiffres ont dû être inventés par un seul peuple, et s'être transmis de ce peuple aux autres chez lesquels on les rencontre. Or nous avons montré (chapitre I.) que ces chiffres hiératiques ordinaux des jours du mois sont très anciens en Egypte, et qu'ils se rattachent aux principes primitifs de la notation hiéroglyphique des nombres, principes déjà effacés dans la notation hiératique, pourtant bien ancienne, des nombres cardinaux. Ces cinq chiffres remontent donc en Egypte jusqu'à une époque où certainement les Aryas orientaux n'étaient pas encore arrivés sur le sol indien. Ainsi ce qui reste à savoir, c'est comment et par quelle voie les peuples Aryas de l'Inde ont reçu ces cinq chiffres égyptiens. Mais c'est là une question que nous réservons, pour la traiter plus tard dans la suite de ce travail.

Considérons maintenant la valeur de position, indépendamment des figures des neuf chiffres et du zéro. M. Wœpcke 29) dit fort bien que les Indiens, avec leur génie peu propre aux sciences d'observation, mais très porté vers les spéculations tant mathématiques que métaphysiques, s'étaient adonnés de bonne heure à l'arithmétique, avec une notion très nette et très étendue des divers ordres décimaux d'unités, comme le prouvent les grands nombres, puissances de dix, exprimés chacun par un nom dès l'époque védique, et comme le prouve mieux encore un calcul prodigieux qu'on rencontre dans le *Lalitavistara*, ouvrage bouddhique écrit au III[e] siècle avant notre ère, c'est-à-dire vers l'époque d'Archimède, et dans lequel ce calcul est cité comme anciennement connu dans l'Inde. Or, le calcul du *Lalitavistara* ressemble presque de point en point à celui de l'*Arénaire* du grand mathématicien grec, avec cette différence, que le livre indien exprime par un seul mot chacune des grandes puissances de 10 prises pour unités nouvelles, tandis qu'Archimède emploie pour le même usage les expressions de *premiers nombres*, *seconds nombres*, *troisièmes nombres*, et ainsi de suite. Je pense, avec M. Wœpcke (p. 66-129) que les Indiens, étant aussi avancés que ce calcul le prouve en matière d'arithmétique décimale, étaient heureusement prédisposés pour inventer l'art d'exprimer tous les nombres par l'écriture au moyen de dix figures quelconques, douées d'une valeur de position décimale, et dont une, prise isolément, aurait un valeur nulle. Or nous venons de constater qu'au moins dès le V[e] siècle de notre ère, époque du *Sourya-Siddhânta*, les Indiens possédaient cet art, dont nous ne trouvons de traces aussi anciennes chez aucun autre peuple. Il est donc naturel de leur attribuer cette invention, comme l'ont fait les Arabes, qui la leur ont empruntée et qui nous l'ont transmise.

M. Cantor (p. 67-69) n'est pas éloigné de partager cette opinion; mais il n'en comprend pas assez toute la probabilité, et il a le tort de diminuer l'antiquité constatée de la valeur de position des chiffres

---

26) Voyez ci-dessus, chapitre I. — 27) Voyez le tableau de M Pihan, p. 41 — 28) Par exemple, les chiffres 2 et 3 sont couchées sur le côté. Voyez le tableau de M. Pihan, p. 28, colonne 2. — 29) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 68-92

dans l'Inde. Il dit d'abord quelques mots sur la notation des nombres par les lettres de l'alphabet sanskrit sans valeur de position, telle que cette notation se trouve chez Aryabhatta et chez d'autres poètes didactiques 30); puis il explique deux notations avec valeur de position, usitées chez des écrivains de la même classe, notations dans lesquelles les neuf chiffres et le zéro sont remplacés soit par des lettres de l'alphabet 31), soit par des mots symboliques 32). Jusque là, c'est fort bien. Mais, à en croire M. Cantor, il ne serait pas prouvé que l'usage de la valeur de position remontât au delà du commencement du VIIe siècle de notre ère, et la première preuve certaine de l'existence du zéro dans l'Inde se trouverait chez Brahmagupta au VIIe siècle, de sorte qu'entre les Indiens et les Chinois la question de priorité resterait indécise. Il est malheureux que M. Cantor n'ait pas porté son attention sur les considérations par lesquelles M. Reinaud a établi que le zéro a été emprunté par les Chinois aux Indiens 33). Il est plus malheureux encore que M. Cantor semble ignorer jusqu'au nom d'un célèbre ouvrage astronomique sanskrit du Ve siècle de notre ère, dont le texte et deux traductions ont été publiées, c'est-à-dire du *Sourya-Siddhânta*, dans lequel on a signalé depuis longtemps l'emploi perpétuel d'une notation représentant par des mots symboliques le zéro et les neuf chiffres avec valeur de position, et dans lequel une locution symbolique prouve, comme nous l'avons constaté plus haut après M. Wœpcke, que les neuf chiffres eux-mêmes étaient connus de l'auteur de ce poème. Mais les neuf chiffres et le zéro, ou bien les noms de nombre qui les remplacent, n'auraient pas pu entrer dans le rhythme poétique commun à tous ces ouvrages didactiques en langue sanskrite, et voilà pourquoi *Sourya-Siddhânta*, Aryabhatta, Varaha-Mihira, Brahmagupta et les autres poètes didactiques indiens ont employé les divers modes de notation dont il vient d'être question.

Ainsi il est prouvé que les neuf chiffres, le zéro et la valeur de position étaient connus dans l'Inde au Ve siècle de notre ère. Il n'est pas prouvé que tout cela ne soit pas aussi ancien dans l'Inde que l'usage de l'écriture; et il n'est pas prouvé que la valeur de position appliquée à des mots symboliques pour les neuf premiers nombres et le zéro ne soit pas plus ancienne encore. Enfin, il est certain que cinq des neuf chiffres ont existé en Egypte, avant d'être employés par les Indiens. Mais la valeur de position était inconnue aux Egyptiens, et c'est probablement aux Indiens qu'on est due l'invention, avec celle de l'usage du zéro, sans lequel la valeur de position n'est que peu commodément applicable.

V. La Vie de Pythagore. 1)

Passant de l'Inde à la Grèce M. Cantor reprend pour guide M. Rœth. Nous avons dit (chap. I) combien légèrement ce guide peu sûr avait traité l'histoire d'Egypte. Quant à l'Inde, il s'était dispensé d'en parler dans ses recherches sur les origines antiques de *notre philosophie occidentale* 2), sous le prétexte qu'on ne sait rien de précis sur la philosophie indienne et qu'elle a été sans influence sur l'occident. Ainsi M. Rœth a ignoré ou dédaigné les travaux de Colebrooke, de Schlegel, de Windischmann, de Burnouf, de M. Lassen et d'autres savants sur la philosophie indienne, et il a méconnu l'influence, parfaitement démontrée par M. Lassen 3), de cette philosophie et du bouddhisme sur l'école grecque d'Alexandrie et sur quelques sectes chrétiennes des premiers siècles de notre ère. Pour la Perse et Zoroastre, M. Rœth 4) s'en est tenu aux travaux d'Anquetil Duperron et de Kleucker, sur lesquels il a bâti ses hypothèses. S'il avait daigné consulter les savantes recherches d'Eugène Burnouf et de M. Lassen, confirmées par celles de M. Spie-

30) Comparez M. Pihan, *Exposé des signes de numération*, p. 59-61. — 31) Comparez M. Pihan, p. 61-62, et M. Jacquet, dans le Nouveau *Journal asiatique* (Paris, août, 1835). — 32) Voyez Albirouni, passage traduit par M. Wœpcke, *Mém. sur la prop. des chiffres ind.*, p. 102-109, et le Mémoire de M. E. Jacquet sur le *Mode d'expression symbolique des nombres employé par les Indiens, les Thibétains et les Javanais* (Nouv. Journ. asiat., Paris, juillet, 1835). — 33) *Acad. des inscr.*, t. XVIII, 2 partie, p. 301. — 1) *Das Leben des Pythagoras*, p. 70-82 de M. Cantor. — 2) *Geschichte unserer abendlændischen Philosophie*, I Band, *Die Ægyptische und die Zoroastrische Glaubenslehre*, Einleitung, p. 25. — 3) *Indische Alterthumskunde*, t. 3, p. 376-412. — 4) T. 1, p. 317-455, et notes 566-700, p. 265-291 à la fin du volume.

gel 5), il n'aurait pas fait 6) de l'antique Zoroastre un contemporain d'Hystaspe père de Darius et un maître dont Pythagore aurait suivi les leçons à Babylone.

Pour la biographie de Pythagore et des plus anciens philosophes de la Grèce, on dirait vraiment que M. Rœth aurait retrouvé des mémoires intimes de ces philosophes, tant il raconte avec assurance les détails de leur vie. Dans le chapitre que nous analysons, et dans ses *Conclusions* finales 7), M. Cantor prétend que la restitution de la vie de Pythagore par M. Rœth est un *chef-d'œuvre de critique*, et que les points principaux de cette histoire s'appuient sur des témoignages incontestables, savoir: sur ceux des péripatéticiens Aristoxène et Dicéarque, suivis toujours fidèlement par Porphyre et par Jamblique, lors même qu'ils ne les citent pas. Mais, au contraire, Porphyre et Jamblique citent fort peu Aristoxène et Dicéarque, et citent fréquemment des auteurs beaucoup plus récents. M. Chassany 8) a montré que de bonne heure la fable s'était emparée de la vie de Pythagore, mais que surtout les néoplatoniciens Porphyre et Jamblique ont traité cette vie en compilateurs de fables de toutes les époques 9). Quant à M. Rœth, il semble vraiment avoir cru que, sur la vie des anciens philosophes de la Grèce, les narrations les plus récentes et les plus circonstanciées étaient les plus dignes de foi 10), et qu'au lieu de les contrôler en les comparant avec les témoignages les plus anciens et les plus sûrs, il n'y avait qu'à imaginer des moyens de les concilier entre elles, et qu'à les ramener à une sorte de vraisemblance par la suppression de quelques traits trop incroyables. Comme le dit le savant et judicieux M. Brandis 11), dont je traduis ici les expressions, le procédé de M. Rœth a consisté à *réunir, sans triage ni critique, toutes les données fournies par les conteurs de tous les âges, de manière à en faire sortir des récits presque romanesques.*

M. Cantor, qui reproduit avec une confiance trop docile ces récits de M. Rœth, appelle lui-même 12) *romanesques* les aventures qui remplissent la première moitié de sa biographie de Pythagore, c'est-à-dire l'histoire de ses lointains voyages, arrangée par l'imagination des rhéteurs grecs, puis par celle des Néoplatoniciens et enfin par celle de M. Rœth. Ce roman ne soutient pas l'examen. Par exemple, il paraît certain que Pythagore est mort au moins octogénaire peu de temps après l'an 509 avant notre ère, date de la destruction de Sybaris 13). Il est donc faux que, jeune encore et longtemps avant de venir fonder son école en Italie, il ait été fait prisonnier à Memphis par Cambyse, dont l'expédition en Egypte est de l'an 526 av. J.-C., que de Memphis il ait été transporté à Babylone, et qu'il y ait conversé pendant douze ans, non-seulement avec les mages, mais avec Zoroastre 14), mort bien de siècles auparavant. De même, en Italie, suivant une tradition très répandue dans l'antiquité 15) malgré les protestations des chronologistes 16), Pythagore aurait eu pour disciple le roi Numa, mort un siècle avant sa naissance.

Il n'est pas invraisemblable que du temps d'Amasis, roi ami des Grecs, Pythagore ait fait un voyage en Egypte, comme le rhéteur Isocrate 17) le disait déjà; mais le voyage de Babylone est bien plus suspect. Sur ce voyage, comme sur bien d'autres points de la vie de Pythagore, il y a un désaccord com-

---

5) Voyez les textes cités par Eug. Burnouf, *Comm. sur le Yaçna*, p. 424 et suiv., p. 428 et p. 442, et par M. Lassen. *Ind. Alterth.*, t. 1, p. 12 et suiv., p. 40 et suiv. p. 751-754; t. 2, p. 207 et suiv. Comparez M. Spiegel, *Avesta*, traduction allemande, t. II, p. VIII, et t. 3, p. LXV — 6) *Gesch. unserer abendl. Philos.* t. 1, *Ægypt. u. Zor. Glaub.*, p. 348-353, et t. 2, *Gesch. der Griechischen Philosophie* (jusqu'à Pythagore inclusivement), p. 341-346. — 7) P. 83-86 et p. 357-361. — 8) *Histoire du roman dans l'antiquité grecque et latine*, p. 232-234 (Paris, 1862, in-8). — 9) Pour juger de l'esprit critique de Néoplatoniciens, il faut lire dans la *Bibliothèque* de Photius, l'analyse de la biographie du philosophe Isidore, écrite par son contemporain le philosophe Damascius. — 10) Comparez M. Chassany, p. 203-218. — 11) *Geschichte der Entwickelung der griechischen Philosophie*, t. 1, p. 158 (Berlin, 1862, in-8). Comparez p 12-14. — 12) Page 78, ligne 4. — 13) Voyez M. Brandis, à l'endroit cité, et *Handbuch der Geschichte der griechischen und der rœmischen Philosophie*, t. 1, p. 422-426 (Berlin, 1835, in-8). — 14) Voyez M. Rœth, t. 2, p. 331-346, et M. Cantor, p. 75-76. — 15) Voyez Cicéron, *Tusc.* IV, 1; Tite-Live, I, 18, et XL, 29; Denys d'Halicarnasse, *Antiq. rom.*, II, 59; Ovide, *Métam.*, XV, 1-481, et Plutarque, *Numa*, chap. 1 et 8. — 16) Cicéron, Tite-Live et Denys d'Halicarnasse combattent cette tradition; Ovide l'accepte; Plutarque est tenté de l'accepter dans le chapitre VIII de sa Vie de *Numa*, après avoir indiqué dans le chapitre I la raison chronologique qui la repousse. — 17) *Busiris*, chap. XI. Sur ce voyage et sur celui de Babylone, voyez aussi Diogène de Laërte, VIII, 3, et Jamblique, *Sur la science mathém.* (*Anecd. græc.* de Villoison, t. II, p. 211-212).

piet entre Porphyre et Jamblique, ces deux grandes autorités de MM. Rœth et Cantor. Jamblique 18), sans citer ses auteurs, raconte qu'après être allé de Milet à Sidon et s'être fait instruire par les hiérophantes des Phéniciens, Pythagore se rendit en Egypte, où, pendant 22 ans, il étudia toutes les sciences des prêtres Egyptiens, et que, pris par les soldats de Cambyse, il fut emmené captif à Babylone, où il s'instruisit dans toute la sagesse des mages. Telle est la fable que MM. Rœth et Cantor ont suivie. Au contraire, Porphyre 19) raconte d'abord les voyages de Pythagore sans le faire aller à Babylone. Il cite (p. 3-4) le récit de Cléanthe, d'après lequel, dans son traité *Des choses fabuleuses*, ce fut à Tyr que, tout jeune encore, Pythagore rencontra des Chaldéens et fut initié par eux à leurs doctrines. Plus loin (p. 9-12), Porphyre, s'appuyant sur Antiphon, raconte que de Samos Pythagore se rendit en Egypte près du roi Amasis, et qu'après avoir été initié aux mystères des prêtres de Diospolis, il revint tranquillement en Ionie, au lieu d'être emmené captif aux bords de l'Euphrate. Ensuite, à titre d'appendice, Porphyre (p. 13-15) ajoute la narration toute différente, insérée par Antonius Diogénès dans son roman des *Merveilles incroyables qu'on voit au delà de Thulé*, et c'est là qu'il est question non-seulement du séjour de Pythagore en Egypte et de son voyage volontaire à Babylone, où, suivant ce romancier et suivant le romancier latin Apulée 20), de même que suivant MM. Rœth et Cantor, il aurait rencontré Zoroastre, mais aussi de ses voyages chez les Arabes et les Hébreux. Apulée 21) ajoute même un voyage de Pythagore chez les brahmanes de l'Inde.

Dans ses *Conclusions finales* (p. 358-359), pour maintenir contre toutes les objections la vérité historique du voyage de Pythagore à Babylone, M. Cantor dit qu'une légende peut bien ajouter des circonstances fabuleuses à un voyage réel, mais, qu'une fable rattachée au séjour d'un personnage dans un lieu déterminé prouve qu'il y a séjourné réellement. En faveur de cet étrange principe de critique historique, M. Cantor allègue l'exemple de Gerbert, qui, dit-il, était allé réellement en Espagne et en Italie, mais sans y rencontrer les aventures que la crédulité lui attribuait. Cet exemple est choisi d'une manière bien malheureuse. Ainsi que nous le verrons (chapitre XXI), le voyage de Gerbert chez les Chrétiens de Catalogne est vrai, comme les voyages de Pythagore sur les côtes grecques de l'Asie mineure. Mais le voyage de Gerbert chez les Musulmans de Cordoue est purement fabuleux, comme le voyage de Pythagore à Babylone, et comme les voyages de Pythagore en Arabie, en Palestine et dans l'Inde.

La seconde partie de la vie de Pythagore, c'est-à-dire celle qui comprend son arrivée en Italie, l'établissement de son école, la fondation et la destruction violente de son institut, soulève des difficultés moins importantes pour l'histoire des sciences: nous ne nous y arrêterons pas. L'histoire de Phérécyde, de Thalès 22) et d'Anaximandre, maîtres prétendus de Pythagore, n'est guères moins fabuleuse que celle de Pythagore lui-même dans le récit arrangé par M. Rœth 23) et accepté par M. Cantor (p. 72-73). Je m'arrête à un seul point de ce récit. Nous verrons tout à l'heure (chap. VI et VII) s'il est vrai que ces philosophes grecs aient emprunté aux Egyptiens et aux orientaux des sciences toutes faites et très avancées. Le fait serait indubitable, si, comme le dit M. Cantor (p. 73), les Egyptiens avaient enseigné à Thalès à calculer les éclipses du soleil pour un lieu donné. Mais j'ai dit ailleurs 24), et je m'engage à prouver dans une dissertation spéciale: 1° par la discussion des textes historiques, qu'il n'est pas suffisamment attesté que jamais Thalès ait essayé de prédire une éclipse de soleil pour un jour et un lieu donnés; 2° par l'histoire de l'astronomie, qu'avant Hipparque le calcul d'une éclipse de soleil pour un lieu donné aurait été impossible aux Egyptiens aussi bien qu'à Thalès. Seulement Thalès avait pu dire qu'une éclipse de soleil phénomène naturel, qui n'est pas même rare, et une éclipse de soleil ayant eu lieu à Milet, il a pu en

---

18) *Vie de Pythagore*, éd. gr. lat. de Küster (Amst., 1707, in-4), ch. 3 et 4, p. 10-18. — 19) *Vie de Pythagore*, même éd. — 20) *Florides*, II, 15, t. 2, p. 56, éd. Oudendorp et Bosscha (Leyde, 1786-1823, 3 vol. in-4). — 21) P. 56-57. — 22) Thalès n'avait rien écrit. C'est à tort que M. Cantor lui prête un poème sur les solstices et les équinoxes. Voyez Diogène de Laërte, I, 23; mais comparez Themistius, *Discours* XXVI, p. 317 BC (Paris, 1684, in-fol.); Simplicius, *Sur le traité de l'âme*, f. 8 (Ald.), et M. Brandis, *Handb. der Gesch. der griech. u. der röm. Philosophie*, t. I, p. 111-112. — 23) Ouvrage cité, t. 2, p. 90-173. — 24) *Etudes sur le Timée de Platon*, t. 2, p. 100.

expliquer la cause physique, qui est l'interposition de la lune entre la terre et le soleil. En effet, voilà tout ce qui semble résulter de témoignages dignes de quelque créance.

VI. La Géométrie de Pythagore. 1)

M. Cantor se propose de prouver dans ce chapitre, par l'examen de la doctrine géométrique de Pythagore, la réalité de son voyage en Egypte, et dans le chapitre suivant, par l'examen de la doctrine arithmétique du même philosophe, la réalité de son voyage à Babylone, où il aurait connu non-seulement Zoroastre, mais aussi la science des Chinois.

Pour établir ces deux thèses, dont la seconde surtout est étrangement hasardée, M. Cantor aurait eu besoin de prouver d'abord qu'il aurait été impossible à Pythagore d'apprendre quelque chose des connaissances scientifiques des Egyptiens et des Babyloniens, sans visiter lui-même ces deux peuples: proposition qui ne me paraît ni démontrable ni vraie. Ensuite, pour établir la première thèse, M. Cantor aurait encore eu besoin de connaître lui-même et de faire connaître à ses lecteurs la géométrie égyptienne et celle de Pythagore, afin de faire voir que la seconde est calquée sur la première. Sans entreprendre cette tâche impossible, M. Cantor a cru y suppléer par les deux raisonnements suivants (p. 85-87 et p. 88-89): 1° de Pythagore à Euclide, il y a eu une succession de géomètres grecs, pythagoriciens pour la plupart; *donc les Eléments d'Euclide doivent être une reproduction plus ou moins arrangée de la géométrie de Pythagore;* 2° D'après les Néoplatoniciens, la méthode symbolique des leçons de Pythagore était empruntée à l'Egypte. De même que les Egyptiens, Pythagore exerçait beaucoup la mémoire de ses élèves, et c'était par la géométrie qu'il commençait son enseignement. D'ailleurs, Proclus dit, non sans vraisemblance, que la nécessité de reconnaître les propriétés territoriales de chacun après la retraite des eaux du Nil a forcé les Egyptiens à inventer, avant tous les autres peuples, la géométrie pratique. En outre, Théon de Smyrne, dans son *Astronomie*, dit que les Egyptiens traitaient cette science géométriquement. Ainsi les Egyptiens étaient géomètres. *Donc la géométrie de Pythagore, conservée dans les Eléments d'Euclide doit être, au moins en grande partie, une géométrie égyptienne.*

Pour réfuter ces deux raisonnements, on pourrait se dispenser d'en discuter les prémisses; car il pourrait suffire de remarquer que les deux conclusions, ne résultant pas nécessairement de ces prémisses, restent de pures hypothèses. Mais, au moins, ces prémisses insuffisantes donnent-elles à ces deux hypothèses quelque probabilité? Non, comme nous allons le montrer.

A l'appui de ces deux hypothèses, M. Cantor cite (p. 90-93) un fait incontestable, savoir, que le *Timée* de Platon suppose une théorie des cinq polyèdres réguliers, ou du moins de quatre d'entre eux, de la décomposition des faces du cube en triangles rectangles isoscèles, et de la décomposition des faces du tétraèdre régulier, de l'octaèdre et de l'icosaèdre en des triangles rectangles scalènes, tels que, réunis deux à deux ou six à six, ils donnent un triangle équilatéral, que des deux angles aigus l'un vaille un tiers et l'autre deux tiers d'angle droit, que l'hypoténuse soit double du petit côté, et que le carré du grand côté soit triple du carré du petit. Je m'empresse d'ajouter qu'en se référant aux explications que j'ai données sur ces polyèdres 2), M. Cantor (p. 92-93) y joint une remarque intéressante. La décomposition des faces pentagonales du dodécaèdre en triangles n'a pas été essayée par Platon; mais, si elle a occupé les Pythagoriciens, elle a pu les conduire à la découverte du *pentagone en étoile*, qu'on obtient en unissant deux à deux par des droites les sommets des angles opposés du pentagone régulier. En effet, un témoignage cité par M. Rœth 3) semble indiquer que ce polygone à angles rentrants était devenu un symbole

1) *Die Geometrie des Pythagoras*, p. 83-94 de M. Cantor.— 2) *Etudes sur le Timée de Platon*, Notes LXVI-LXVIII, t. 2, p. 234-245. — 3) Ouvrage cité, t. 2, note 813; p. 140-141. M. Rœth a eu tort de croire que le texte obscur qu'on lit vers la fin du premier livre de la *Géométrie* de Boèce sur le pentagone étoile, vient des *Eléments* d'Euclide. Voyez ci-près chap. XII

important dans l'école pythagoricienne. Mais ce témoignage d'un Scholiaste 4) ne prouve pas que l'emploi de ce symbole remontât aux premiers temps de l'école, ni même au temps de Platon, qui néglige la décomposition du pentagone en triangles, décomposition indiquée par Alcinoüs et par Plutarque, mais d'une manière aussi erronée qu'étrangère au pentagone en étoile 5). Quant à la théorie des quatre autres polyèdres réguliers et de la décomposition de leurs faces en triangles, il est vrai qu'elle est supposée par le *Timée* de Platon ; mais cela ne prouve pas qu'elle vienne du pythagoricien Timée 6), ni surtout qu'elle vienne de Pythagore lui-même, ni que par Pythagore elle vienne des Egyptiens, ni que pour apprendre cette théorie Pythagore ait été obligé d'aller se faire recevoir prêtre égyptien dans la Thébaïde.

En faveur de sa première hypothèse, qui rabaisse Euclide au profit de Pythagore, M. Cantor (p. 89-90) cite deux problèmes importants d'Euclide dont l'invention est attribuée par Proclus à Pythagore lui-même. Mais, sans révoquer en doute cette assertion de Proclus, il suffit de remarquer que, de ces deux problèmes isolés et de quelques autres qui sont attribués à d'anciens Pythagoriciens par Proclus et par Eudème, il y a loin à l'ensemble des théories contenues dans les *Eléments* d'Euclide. Si cette première hypothèse de M. Cantor était vraie, l'histoire de la géométrie grecque, depuis Thalès et Pythagore jusqu'à Euclide, devrait se réduire à l'histoire des remaniements d'une doctrine dont le fond aurait été donné dès le début. Au lieu de cela, l'histoire nous dit que depuis Thalès et Pythagore jusqu'à Euclide les Grecs ont créé la géométrie élémentaire par des progrès successifs.

Par sa seconde hypothèse, M. Cantor (p. 85-86, 87-88, 89-90, 93-94) veut que chez les anciens Egyptiens l'arpentage ait été l'application d'une géométrie savante, qui embrassait la théorie des angles et des parallèles, la théorie de l'égalité et de la similitude des triangles, toute la théorie géométrique des proportions et la théorie des figures planes équivalentes ; et que l'astronomie des Egyptiens était l'application de cette même géométrie, qui devait embrasser de plus toute la théorie de la sphère et des cinq polyèdres réguliers : il suppose que tout cela devait se trouver chez les Egyptiens, parce que tout cela se trouvait, dit-il, chez les Pythagoriciens, qui, par le chef de leur école, tenaient ces notions de l'Egypte. Il y a là évidemment une *pétition de principe*, puisqu'il s'agit précisément de prouver que Pythagore a emprunté sa géométrie aux Egyptiens. D'ailleurs, les faits viennent contredire cette hypothèse. Car M. Cantor lui-même (p. 89-90) reconnaît que, d'après des témoignages qu'il accepte, Thalès, Pythagore, le pythagoricien Œnopide et d'autres Grecs avaient trouvé eux-mêmes, et non emprunté, la formule et la démonstration de plusieurs théorèmes fondamentaux de la géométrie élémentaire. Ainsi, tout en prétendant (p. 74-75), à l'exemple de M. Rœth 7) et sur la parole d'Antiphon 8), biographe inepte d'une époque inconnue 9), qu'après de vaines tentatives près des prêtres de Memphis et d'Héliopolis, Pythagore s'était fait admettre à Thèbes (Diospolis) dans le sacerdoce égyptien, et qu'il en avait recueilli toute la science mystérieuse, M. Cantor (p. 89-90) reconnaît que, longtemps après avoir quitté l'Egypte, ce même Pythagore, par ses propres méditations, avait découvert la valeur du carré de l'hypoténuse en fonction des deux autres côtés du triangle rectangle ; mais cet aveu n'empêche pas M. Cantor de soutenir que les Grecs ont emprunté aux Egyptiens toute leur méthode géométrique et un grand nombre de théorèmes. Alors je demanderai comment il pourrait se faire que, possesseurs de cette excellente méthode depuis des siècles, les Egyptiens n'eussent pas été conduits par elle à ces théorèmes élémentaires sans lesquels il n'y a pas de géométrie digne de ce nom, et qu'ils eussent laissé aux Grecs, à ces *enfants*, comme ils les appelaient 10), le soin de les inventer les uns après les autres. C'est là une question à laquelle M. Cantor aurait dû répondre, avant de formuler sa seconde hypothèse, d'après laquelle la géométrie d'Euclide viendrait des Egyptiens par l'intermédiaire de Pythagore.

---

4) Sur Aristophane, *Nuées*, v. 611. Rien ne prouve qu'un passage de Jamblique (*Vie de Pythagore*, chap. 33, p. 191-192 de Küster) ait trait au même symbole. — 5) Voyez mes *Etudes sur le Timée*, Note LXIX, t. 2, p. 245-247. — 6) Le traité *De l'âme du monde et De la nature*, attribué à Timée, est un mauvais extrait du dialogue de Platon. — 7) Ouvrage cité, t. 2, p. 312-313. — 8) Dans Porphyre, *Vie de Pythagore*, p. 9-12 de Küster, et dans Diogène de Laërte, VIII, 3. — 9) Voyez Meiners, *Hist. des sciences dans la Grèce*, trad. franç. III, 4, t. 1, p. 138, et note 76, p. 351-352. — 10) Voyez le *Timée* de Platon, p. 22 B.

Tout en repoussant cette hypothèse, je reconnais que, d'après des témoignages antiques, l'origine de la géométrie grecque est en Egypte. Qu'est-ce donc que les plus anciens géomètres de la Grèce ont pu emprunter aux Egyptiens, puisque ce n'est ni la méthode scientifique, ni la démonstration des théorèmes fondamentaux ?

La réponse à cette question peut nous être suggérée par un mot attribué à Platon 11), grand admirateur pourtant des Egyptiens et des orientaux : « Tout enseignement emprunté aux barbares par les Grecs et surtout par les Athéniens fait bientôt entre leurs mains de rapides progrès. » Les Grecs avaient, en effet, à un degré éminent, quelque chose qui manquait plus ou moins aux autres peuples de l'antiquité : c'était l'esprit scientifique, l'esprit d'investigation, d'examen et de démonstration rigoureuse. Ce fut cet esprit qu'ils appliquèrent aux connaissances traditionnelles de l'Egypte et de l'Orient. L'Egypte avait fourni à Thalès, à Pythagore et à d'autres Grecs certaines notions pratiques d'arpentage: ces notions étaient fondées sur des formules empiriques, quelquefois inexactes et toujours dépourvues de démonstrations 12). L'esprit philosophique des Grecs, méditant sur ces formules pour en vérifier la légitimité et pour en chercher la raison, a trouvé la méthode géométrique, et par elle l'enchaînement des démonstrations de la science, tel qu'il se montre, par exemple, dans les *Eléments* d'Euclide. M. Arneth 13) avait exprimé cette pensée. Je l'ai développée, en l'appuyant de faits nombreux et des considérations nouvelles, dans mes *Recherches sur Héron d'Alexandrie* 14). Dans une dissertation plus récente 15), j'ai résumé cette même pensée, dans laquelle je persiste, et qui me paraît offrir la seule conciliation possible des témoignages antiques sur l'origine égyptienne de la géométrie et sur la formation successive de cette science par les Grecs.

Ajoutons que, pour connaître les procédés d'arpentage usités en Egypte, Pythagore n'a pas eu, comme MM. Rœth et Cantor le supposent, un besoin indispensable de se faire recevoir membre de la caste sacerdotale égyptienne, ni d'aller passer 22 ans dans les sanctuaires de la Haute Egypte. Il n'est pas même nécessaire qu'il ait touché le sol égyptien : assez de Grecs intelligents allaient alors en Egypte pour leurs affaires, et Amasis les y attirait; ils pouvaient se faire expliquer les procédés qu'ils voyaient employer pour le mésurage des terres, et ils pouvaient rapporter en Grèce ces explications insuffisantes, mais bien capables d'exciter le génie d'investigation scientifique d'un Pythagore ou d'un Thalès.

VII. L'Arithmétique de Pythagore. 1)

A côté d'hypothèses hasardées sur un voyage prétendu de Pythagore à Babylone et sur sa connaissance prétendue de l'arithmétique chinoise, ce chapitre de M. Cantor présente des faits importants bien exposés, ingénieusement rapprochés, dont il faut voir les détails dans l'ouvrage même, dont j'indiquerai les points principaux, en y joignant mes observations et mes réserves.

M. Cantor (p. 93-96) pose une distinction, bien connue des Grecs, entre l'arithmétique spéculative ou théorie des nombres, qu'ils nommaient ἀριθμητική, et l'arithmétique pratique, ou art des calculs usuels, qu'il nommaient λογιστική. Il est évidant que cet art de calculs a appartenu plus ou moins à tous les peuples de l'antiquité, et spécialement aux peuples commerçants, par exemple aux Babyloniens, auxquels Théon de Smyrne 2) attribue en effet des méthodes arithmétiques en astronomie, et auxquels, suivant

11) Voyez une *Vie* anonyme *de Pythagore,* dans la *Bibliothèque* de Photius, cod. 249, p. 441 *a* (éd. Bekker). — 12) L'inscription d'Edfou, savamment expliqué par M. Lepsius (Mém. cité ci-dessus, chap. I), prouve que sous Ptolémée XI, après les progrès de la science alexandrine, les Egyptiens, pour évaluer la superficie de terrains de forme irrégulière, les divisaient autant qu'ils pouvaient en rectangles, ou bien en trapèzes ayant deux angles droits, et qu'ils estimaient, quelquefois peu exactement, l'aire des parcelles, par la demi-somme de deux lignes multipliée par la demi-somme de deux autres lignes. — 13) *Geschichte der reinen Mathematik,* p. 74-76, 70-78, 142-149, 155-150, 175-176, et 177-179 (Stuttgart, 1852, in-8). — 14) III partie, chap. 4, § 3, p. 163-176 (Paris, 1854, in-4). — 15) *Examen d'un Mémoire posthume de M. Letronne* (*Revue Archeol.* 1854), p. 137 du tirage à part. — 1) *Die Arithmetik des Pythagoras,* p. 95-110. — 2) *Astron*, chap. XXXIII, p. 272.

Jamblique 3), Pythagore aurait emprunté la notion de la *proportion harmonique*, qui devint la base de son arithmétique musicale 4). Mais le fait de cet emprunt me paraît très douteux, et lors même qu'il serait avéré, il n'offrirait pas, comme M. Cantor (p. 96) paraît le croire, une raison suffisante d'attribuer aux Babyloniens l'invention de théories purement arithmétiques, mais équivalentes à toute cette arithmétique géométrique que, suivant lui, Pythagore aurait rapportée d'Egypte et qui remplit les livres VII, VIII et IX des *Eléments* d'Euclide.

L'art des calculs doit avoir appartenu plus encore aux Phéniciens, commerçants par excellence, auxquels Porphyre et Proclus en attribuent l'invention, et nous n'aurions pas même besoin des témoignages d'Hérodote et de Platon, pour croire que dès la plus haute antiquité un peuple aussi avancé que l'étaient les Egyptiens n'était pas étranger à cet art, comme l'indiquent d'ailleurs les dénombrements qui figurent dans des inscriptions très antiques des Pharaons.

L'arithmétique, comme art, conduit à une sorte d'algèbre pour la solution des problèmes numériques. Cet art algébrique élémentaire avait été cultivé par un certain pythagoricien nommé Thymaridas, et Diophante y a excellé dans l'école grecque d'Alexandrie 5); mais rien n'indique que les Babyloniens, les Phéniciens ou les Egyptiens l'eussent transmis aux Grecs.

Quant à l'arithmétique spéculative, qui étudie les propriétés nécessaires des nombres, indépendamment de toute application pratique, et même indépendamment de tout système particulier de numération, Pythagore avait posé les principes qui furent développés par son école. Mais M. Cantor (p. 98 et p. 100-101) n'aurait pas dû attribuer à Pythagore lui-même presque tout ce qui a appartenu aux Pythagoriciens soit avant, soit même depuis l'époque d'Aristote, et faire remonter aux Babyloniens toutes les théories mathématiques attribuées à Pythagore, par exemple la théorie des *nombres linéaires*, des *nombres plans* et des *nombres solides*, telle qu'on la trouve développée chez Théon de Smyrne, chez Nicomaque et chez Jamblique 6). Seulement une des conséquences de l'hypothèse fondamentale sur laquelle repose cette théorie, est employée par Platon dans son *Timée* 7), dialogue où quelques idées des Pythagoriciens sont mêlées à celles de l'auteur, mais qui est la source de l'opuscule faussement attribué au pythagoricien Timée, bien loin d'en être le développement 8). La notion de cette hypothèse était attribuée, à tort ou à raison par Jamblique à un certain Thymaridas 9), qui, au lieu d'être, comme M. Cantor le suppose, Thymaridas de Tarante, disciple immédiat de Pythagore 10), pourrait tout aussi bien être Thymaridas de Paros, autre pythagoricien dont l'époque est inconnue 11). Supposons pour un instant que toutes ces notions arithmétiques viennent de Pythagore lui-même : de quel droit en peut-on conclure qu'il les ait toutes empruntées aux Babyloniens?

Il est invraisemblable, dit M. Cantor (p. 100), que Pythagore, qui a tant fait pour la musique, pour l'astronomie et pour d'autres sciences, ait pu encore inventer toute une arithmétique spéculative. Je réponds que, si les premières notions très élémentaires de l'arithmétique, de la géométrie, de l'acoustique musicale formulée en nombres, de l'astronomie, de la physique, de la métaphysique et de la morale des Pythagoriciens peuvent venir de Pythagore lui-même, il est très probable que les développements ap-

---

3) *Comm. sur Nicomaque*, p. 168 (ed. Tennulius). — 4) Voyez Théon de Smyrne, *Arithm.*, chap. 66, 82, 89, 93 (*Mus.* chap. 33, 50, 57, 61), p. 133-134, 166-167, 180-181 et 186-188 de la seule édition complète (Paris, 1644, in-4); Nicomaque, *Arithm.*, II, 26 et suiv., p. 144 et suiv. (éd. Ast), et Jamblique, *sur Nicomaque*, p. 151 et suiv. M. Cantor (note 17, p. 380) exprime le regret de n'avoir eu à sa disposition et par conséquent de n'avoir pu citer ni l'*Arithmétique* de Nicomaque, ni le *Commentaire* de Jamblique. — 5) Voyez M. Cantor p. 96-97. — 6) Voyez Théon de Smyrne, *Arithm.*, chap. 18-20, 22, et 25-28. Nicomaque, *Arithm.*, II, 7-12, et Jamblique, *Comm. sur Nicomaque*, p. 82-87. Comparez ma traduction annotée des chap. 8 et 20 du II livre de Nicomaque (Rome, 1868, in-4, Extrait des *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. 8, nov. 1857). — 7) Voyez M. Cantor (p. 99-100), qui renvoie à mes *Etudes sur le Timée*, t. 1, p. 91, et p. 337-345. — 8) Voyez mes *Etudes sur le Timée*, t. 2, p. 390-393. — 9) Voyez Jamblique, *Comm. sur Nicom.*, p. 36. Comparez p. 11, 68, 91 et 95. M. Nesselmann (*Algebra der Griechen*, p. 232) croit que ce Thymaridas doit être postérieur à l'ère chrétienne. — 10) Voyez Jamblique, *Vie de Pythagore*, chap. 23, p. 87 de Küster. — 11) Voyez Jamblique, *Vie de Pythagore*, chap. 23, p. 97 de Küster.

partiennent aux disciples, et non au maître, qui n'avait rien écrit, et sur les doctrines propres duquel nous savons peu de chose et avec peu de certitude. Nous savons même que, sur l'application de l'arithmétique aux sphères célestes, les disciples avaient créé une théorie toute différente de celle du maître 12). Ainsi, parmi les doctrines arithmétiques des Pythagoriciens de diverses époques, il peut y en avoir qui ne viennent pas de Pythagore, et encore moins des Babyloniens, dont l'arithmétique spéculative est pour nous lettre close, et que nous n'avons aucun motif suffisant de considérer comme les maîtres de Pythagore en quoi que ce soit.

L'arithmétique des Chinois ne nous est pas aussi inconnue que celle des Babyloniens. Or, entre les théories symboliques des Chinois sur les nombres et celles des Pythagoriciens, M. Cantor (p. 101-107) trouve des ressemblances qui ne lui paraissent pas pouvoir être fortuites. Il a puisé ces rapprochements dans l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla 13), sans pouvoir recourir aux textes que cet auteur a négligé d'indiquer. Il aurait fallu remonter à la source où Montucla avait puisé, c'est-à-dire aux publications du P. Amiot et d'autres missionnaires; ou bien il aurait fallu consulter les travaux d'Abel Rémusat, et le savant ouvrage de Windischmann 14), qui a mis en œuvre, avec une haute intelligence, quelquefois emportée par l'imagination, ces documents et d'autres sur les sciences chinoises. M. Cantor aurait pu d'ailleurs trouver presque toutes les indications désirables pour lui, dans un ouvrage où précisément la thèse qu'il soutient avait été développée avec plus d'étendue, c'est-à-dire dans l'ouvrage allemand de M. Gladisch sur *Les anciens Chinois et les Pythagoriciens* 15). Quelques uns des rapprochements établis par M. Gladisch sont forcés 16) et ont été justement contestés 17). Mais quelques uns sont bien réels, et leur ensemble reste frappant, d'autant plus que beaucoup d'entre eux portent sur des spéculations métaphysiques très arbitraires, et sur un symbolisme de nombres plus arbitraire encore. Les Chinois, suivant leur habitude, font remonter à leurs plus anciens rois toutes ces spéculations sur les nombres. Mais l'existence de ces spéculations en Chine n'est démontrée que pour une époque très postérieure à celle de Pythagore.

Cependant comment se fait-il qu'elles se trouvent à la fois en Grèce et en Chine? M. Gladisch, qui prétend faire venir de la Chine non-seulement les théories des Pythagoriciens sur les nombres 18), mais aussi toute la morale et toute la discipline de Pythagore 19), veut que les Chinois, sous le nom d'*hyperboréens*, aient été en relation avec les Grecs dès la plus haute antiquité, à travers les steppes de l'Asie, celles de la Mer noire et les montagnes de la Thrace, et que l'hyperboréen Abaris, ami de Pythagore, soit un chinois venu en Grèce par ce chemin. Trop sensé pour bâtir de telles hypothèses, M. Cantor suppose (p. 101-103 et p. 50-52) qu'une même doctrine sur les nombres, apportée de Babylone en Grèce par Pythagore, était née soit à Babylone, soit en Chine, et avait été transmise de l'une de ces contrées à l'autre par des relations directes entre les Babyloniens et les Chinois. Je ne crois pas que cette hypothèse soit la seule possible, comme M. Cantor (p. 101) l'insinue pour forcer ses lecteurs à l'adopter. Car, d'abord, il est très douteux que Pythagore ait emprunté quelque chose aux Babyloniens; ensuite, entre les Grecs et les Babyloniens, la Phénicie aurait pu servir d'intermédiaire, sans que Pythagore fût allé à Babylone, et en effet c'est à Tyr qu'une tradition grecque 20) conduit Pythagore, pour l'y mettre en relation avec des savants chaldéens; enfin, les relations directes que M. Cantor suppose entre la Chine

---

12) Voyez mes *Etudes sur le Timée*, t. 2, p. 92-119, et M. Brandis, *Handb. der Gesch. der griech. und der röm. Philos.*, t. 2, p. 370-371. — 13) T. 1, p. 224 (Paris, an VII, in-4). — 14) *Die Philosophie im Fortgang der Weltgeschichte*, 1 partie (seule parue), 1 division : *Die Grundlagen der Philosophie im Morgenland*, livre I, p. 293-218 et p. 135-173 (Bonn, 1827-1834, in-8). — 15) *Die alten Schinesen und die Pythagoræer* (Posen, 1841, in-8, 218 pages). Voyez aussi, du même auteur, *Die religion und die Philosophie*, p. 7-23, et p. 130-139 (Breslau, 1852, in-8, 235 pages). — 16) Par exemple, les Chinois, comme les Pythagoriciens, ont cru à une musique cosmique; mais celle des Chinois, reposant sur une série de 12 demi-tons, était très différente de celle des Pythagoriciens. — 17) Voyez M. Brandis, *Geschichte der Entwickelung der griechischen Philosophie*, p. 12-14 (Berlin, 1862, in-8). — 18) *Die alten Schinesen und die Pythagoræer*, p. 50-104. — 19) Même ouvrage, p. 106-201. — 20) Voyez Cléanthe dans Porphyre, *Vie de Pythagore*, p. 3-4 de Küster.

d'une part et d'autre part la Babylonie et l'Egypte, sont mal prouvées par la découverte de porcelaines chinoises en ces deux derniers pays, puisqu'étant, comme nous l'avons vu (chapitre III), d'une époque peu ancienne, ces porcelaines ont dû être apportées là par les Arabes mahométans. Quand le cycle de Méton est arrivé en Chine, c'est en passant par l'Inde. C'est de même en passant par l'Inde, qu'est arrivé en Chine le zodiaque lunaire, né, selon toute vraisemblance, à une époque très ancienne, dans l'Asie occidentale, peut-être en Babylonie, et dont le caractère lunaire a été effacé par les Chinois 21). De même, certaines théories arithmétiques ont pu passer soit de Babylonie, soit de Grèce, en Chine, par l'intermédiaire de l'Inde. Il n'est donc pas impossible que les spéculations symboliques sur les nombres aient passé dans l'Inde par l'influence que les sciences grecques obtinrent dans ce pays après l'expédition d'Alexandre, et que de l'Inde ces spéculations arithmétiques aient passé en Chine.

Outre les spéculations symboliques sur les nombres, M. Cantor a remarqué une proposition arithmétique enseignée d'une manière presque identique en Chine et dans l'école pythagoricienne: il suppose (p. 103 et 110) que Pythagore l'avait apprise à Babylone, où les Chinois avaient dû, suivant lui, en apporter la donnée première, développée ensuite par les Babyloniens. L'indication de cette proposition se trouve dans le *Tcheou-pey*. Or, cet ouvrage chinois, considéré par Biernatzki et par M. Cantor (p. 103) comme œuvre du prince chinois Tcheou-Koug, qui vivait vers 1100 ans avant notre ère, se divise en deux livres égaux, et contient deux dialogues très inégaux, dont le premier, entre le prince Tcheou-Koug et un savant, renferme le passage que M. Cantor invoque. Mais il n'est nullement prouvé que l'un des deux personnages de ce dialogue en soit en même temps l'auteur. Les Chinois avouent que le premier livre de l'ouvrage existait seul autrefois: ils disent que le premier dialogue, qui forme à peu près le cinquième du premier livre, est beaucoup plus ancien que le second dialogue; mais tout ce qu'on sait sur l'antiquité du *Tcheou-pey*, c'est que le second dialogue n'est pas postérieur à la dynastie des Han, qui a fini en l'an 223 de notre ère, et que le premier dialogue est plus ancien que le second 22). Dans ce premier dialogue, on trouve une méthode d'arpentage, dans laquelle les seuls angles qu'on mesure sont des angles droits. On y lit que l'art de calculer se ramène au cercle et au quadrilatère, c'est-à-dire au rectangle, et que, dans un triangle rectangle dont la base est 3 et la hauteur 4, la ligne qui unit les extrémités de ces deux côtés est 5. Or ce triangle portait en Grèce le nom de *triangle de Pythagore* 23), et Vitruve 24) dit que, pour faire un angle droit, Pythagore avait imaginé de réunir en un triangle trois perches de 3, 4 et 5 pieds de longueur. Ce rapport, le plus simple qui puisse exister entre les côtés d'un triangle rectangle scalène, a pu être trouvé en deux contrées différentes, sans qu'il y ait eu communication entre les inventeurs. Si pourtant on veut que l'invention n'ait été faite que par l'un des deux peuples et qu'elle se soit transmise à l'autre, voici une hypothèse qui me paraît plus vraisemblable que celle de M. Cantor.

Les Grecs avait emprunté aux Egyptiens des procédés d'arpentage obtenus par tâtonnement et conservés par tradition. Cette méthode pratique, qui évitait toute mesure d'angles variables et qui n'employait que des angles droits ou des angles égaux entre eux par construction, s'est conservée chez les arpenteurs grecs et romains, même après l'invention grecque de la trigonométrie, comme je l'ai montré ailleurs 25). Les Egyptiens avaient sans doute su, avant Pythagore, que pour faire un angle droit, il suffit de former le sommet d'un angle avec les extrémités de deux règles dont les longueurs soient 3 et 4, puis d'aug-

---

21) Voyez les deux Mémoires de M. Weber intitulés: *Die vedischen Nachrichten von den Naxatra* (Extraits des *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1860, p. 283-332, et 1861, p. 267-400).—22) Voyez M. Edouard Biot, *Journal asiatique* de Paris, juin 1841, p. 593 et suiv. — 23) Voyez la *Théologie arithmétique*, chap. 6 et 7, p. 39-69 et p. 62 (éd. Ast), et Proclus, *Commentaire sur le I livre des Eléments d'Euclide*, I, 47, p. 111 (éd. gr. de Bâle). Alexandre d'Aphrodisias (*Sur la Métaph. d'Aristote*, I, 8, p. 56, éd. Bonitz, Berlin, 1847, in-8) constate la vénération des Pythagoriciens pour ce triangle. Beaucoup d'autres auteurs parlent de ce triangle, mais sans l'attribuer spécialement à Pythagore ou à son école. — 24) *De architectura*, IX, Praef. sect. 4 et 7, p. 227, éd. Schneider.— 25) *Recherches sur Héron d'Alexandrie*, p. 94.

menter ou de diminuer l'ouverture de l'angle, jusqu'à ce qu'une troisième règle, dont la longueur soit 5, placée entre leurs extrémités, complète le triangle. La domination exercée pendant cinq siècles par les Egyptiens en Babylonie 26) a pu y introduire très anciennement cette connaissance usuelle, qui aura passé de là dans l'Inde, puis de l'Inde en Chine, avant l'époque de la rédaction du *Tchéou pey*, époque probablement beaucoup moins ancienne que M. Cantor ne le suppose. D'un autre côté, les relations intimes de la Grèce avec l'Egypte sous Amasis ont pu facilement introduire en Grèce les procédés égyptiens d'arpentage, de sorte que, pour recueillir la notion du triangle rectangle dont les côtés sont 3, 4 et 5, Pythagore n'aurait eu besoin d'aller ni chez les Babyloniens, ni même chez les Egyptiens, à qui Plutarque 27) attribue la connaissance de ce triangle. Ajoutons que plus tard les méthodes grecques d'arpentage, avec leurs termes caractéristiques, ont été copiés par les Indiens et notamment par Brahmagupta 28).

Mais, pour Pythagore ou pour ses disciples, la notation de ce triangle rectangle scalène dont les côtés sont 3, 4 et 5 n'était pas restée stérile. Sans doute, ils avaient remarqué que le carré de 5 est égal à la somme des carrés de 3 et de 4; ils avaient cherché si cette propriété, d'avoir un côté dont le carré fût égal à la somme des carrés des deux autres, était commune à tous les triangles rectangles, et ils avaient trouvé la démonstration de cette vérité géométrique 29).

M. Cantor (p. 104-110) attribue à Pythagore, et aux Babyloniens avant lui, un procédé arithmétique qui a dû les conduire à la découverte de cette propriété des nombres 3, 4 et 5, d'avoir des carrés dont l'un est égal à la somme de deux autres, et de là à la considération des triangles rectangles en nombres rationnels. Cette explication est très ingénieuse, et il me parait probable que cette méthode a été suivie, je ne dirai pas par les Babyloniens, ni même peut-être par Pythagore, mais par les Pythagoriciens, auxquels appartient certainement la théorie des *nombres* dits *polygonaux* et des *nombres* dits *polyèdriques*. Les Pythagoriciens donc avaient fait ces deux remarques, répétées par les Néopythagoriciens: 1° que l'addition des termes de la série des nombres impairs donne la série des nombres carrés 30); 2° que l'addition des termes de la série des nombres carrés donne la série des *nombres* dits *pyramidaux* 31). Ils avaient pu remarquer que, parmi les nombres carrés consécutifs pris deux à deux, il y en avait quelques uns, par exemple 9 et 16, qui, additionnés ensemble, donnaient le nombre carré suivant. En effet, l'école de Pythagore aimait ce qu'on peut appeler l'expérimentation arithmétique. Par exemple, c'est encore aux Pythagoriciens qu'appartient cette remarque, que l'addition des termes de la série des nombres pairs donne les *nombres rectangulaires*, dits ἑτερομήκεις, c'est-à-dire dont chacun est le produit de deux facteurs entiers dont la différence n'est que d'une unité 32); et cette opposition des carrés et des ἑτερομήκεις était connue des Pythagoriciens dès avant Aristote, puisqu'elle figure parmi les catégories pythagoriciennes mentionnées par ce philosophe 33). De même encore, les Pythagoriciens savaient 34) que l'addition des termes de la série naturelle des nombres entiers donne la série des *nombres* dits *triangulaires*. De plus, on pouvait placer l'une sous l'autre la série des carrés en commençant par 1 et la série des impairs en commençant par 3, et, en additionnant les deux termes placés l'un sous l'autre, on devait retrouver la série des carrés, mais commençant par 4. Nicomaque 35) retrouvait cette même série de carrés à partir de 4, en posant de même l'une sous l'autre la série des *nombres triangulaires* commençant par 1 et cette même série commençant par 3, et en additionnant de même deux à deux les nombres super-

---

26) Voyez ci-dessus, chap. I. — 27) *Sur Isis et Osiris*, chap. LVI. — 28) Voyez mes *Rech. sur Héron d'Alex.*, p. 169-176. Comparez p. 139. — 29) Voyez Plutarque, *Questions de table*, VIII, 2, n. 4, p. 720, et *Qu'on ne peut vivre doucement suivant Epicure*, chap. XI, p. 1094; Diogène de Laërte, VIII, 12; Athénée, *Symp.*, X, 4, p. 418 F (Casaubon); Proclus, *Sur le livre I d'Euclide*, IV, p. 110-111 (éd. gr. de Bâle), et Porphyre, *Vie de Pythagore*, p. 39 (Küster). — 30) Voyez Nicomaque, *Arithm.*, II, 8, p. 119-120 (Ast); Théon de Smyrne, chap. XIX, p. 48 (Paris, 1640, in-4), et Jamblique, *Comm. sur Nicomaque*, p. 83 (Tennulius). — 31) Voyez Nicomaque, II, 14, p. 125-128, et Jamblique, *Comm.*, p. 134-135. — 32) Voyez Théon de Smyrne, chap. XIII, p. 39-40; Nicomaque, II, 17, p. 129-130, et Jamblique, p. 106. — 33) *Méthaphysique*, I, 5, p. 986a, l. 22-26 (éd. de Berlin). — 34) Voyez Théon de Smyrne, *Arithm.*, chap. XIX, p. 44; Nicomaque, II, 8, p. 118-119, et Jamblique, p. 62. — 35) II, 12, p. 122. Voyez aussi le *Commentaire* de Jamblique, p. 84.

posés. M. Cantor conclut qu'en opérant de même sur la série des carrés commençant par 1 sur la série des carrés commençant par 4, on a pu voir que la troisième des additions partielles, celle des nombres 9 et 16, donne le carré suivant, c'est-à-dire 25. Ensuite, sachant que les côtés de ces trois carrés sont ceux d'un triangle rectangle, et que tout triangle rectangle jouit de cette même propriété, les Pythagoriciens ont dû être conduits par cette méthode d'expérimentation arithmétique à la distinction des triangles rectangles en nombres rationnels et des triangles rectangles en nombres irrationnels. Les anciens n'ont pas connu la formule générale qui permet de trouver tous les triangles rectangles en nombres rationnels qu'on peut construire sur un côté donné. Mais Proclus 36) et les fragments d'Héron 37) nous ont conservé deux formules particulières, attribuées l'une à Pythagore et l'autre à Platon, et qui permettent toutes deux de trouver un triangle rectangle en nombres rationnels, savoir : l'une lorsque le côté donné est exprimé par un nombre pair, et l'autre lorsqu'il est exprimé par un nombre impair.

Ces vues de M. Cantor expliquent bien l'enchaînement des progrès de certaines théories arithmétiques et géométriques dans l'école pythagoricienne : en les résumant, je les ai appuyées par des autorités antiques dont M. Cantor n'avait cité qu'une très petite partie.

VIII. Les signes numéraux des Grecs. 1)

Au commencement de ce chapitre, M. Cantor rappelle ce qu'il croit avoir démontré, c'est-à-dire que Pythagore était allé s'initier aux sciences de l'Égypte et de la Babylonie, et que par conséquent il avait dû y connaître la numération et les signes numéraux des Égyptiens et des Babyloniens, et qu'il avait dû y trouver aussi la *tablette à calculer*, usitée partout en orient. Il sera question plus loin (chapitres IX et X) de la tablette à calculer, perfectionnée par les Pythagoriciens, et nous aurons aussi l'occasion de revenir (chapitre XVII) sur la ressemblance de certains chiffres égyptiens avec les chiffres pythagoriques de Boèce et avec les nôtres. Mais nous devons dire ici que les signes numéraux cunéiformes de la Babylonie ne paraissent avoir eu aucune influence sur la numération écrite des Grecs en général et des pythagoriciens en particulier.

Abordant son sujet, M. Cantor mentionne d'antiques inscriptions grecques où les noms de nombre sont écrits en toutes lettres, en commençant par les unités simples.

Puis il défend contre M. Nesselmann le témoignage de Jamblique 2), qui dit que primitivement les Grecs désignaient les nombres par autant de traits qu'il y avait d'unités : nous avons vu que telle était la notation hiéroglyphique des Égyptiens pour les nombres au dessous de 10. Ajoutons qu'il en était de même dans un système dont M. Cantor n'a pas fait mention, dans l'un des deux systèmes de notation numérale des Phéniciens, de ce peuple auquel les Grecs devaient leur alphabet et leur principal système de notation numérale. On trouve un exemple de ce mode rare de notation grecque dans une inscription de Tralles en Carie, datée du 7[e] mois de l'an 7 d'Artaxerce II, et qui doit être par conséquent de l'an 351 avant notre ère. Le mot *septième* y est exprimé par sept traits verticaux : ἔτεος IIIIIII. Cette vieille méthode de notation n'avait donc pas entièrement disparu, au IV[e] siècle avant notre ère, dans cette colonie des Pélasges d'Argos et des Thraces 3).

Ensuite M. Cantor expose les trois systèmes de chiffres alphabétiques usités chez les Grecs, savoir : 1° celui qui, limité aux nombres au dessous de 25, les exprimait par les 24 lettres de l'alphabet ionien prises suivant leur ordre ; 2° celui qui exprimait 1 par la lettre I initiale de Ἴα pour μία, 5 par le Π de

36) *Comm. sur Euclide*, p. 47 (éd. gr. de Bâle). — 37) Voyez mes *Recherches sur Héron*, p. 126, et M. Biot, *Journal des savants*, mai 1849, p. 313 et suiv. — 1) *Die Zahlzeichen der Griechen*, p. 111-127 de M. Cantor. — 2) *Comm. sur Nicomaque*, p. 80 (Tennulius). Comparez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, p. 202, note 43 (Berlin, 1842, in-8). — 3) Voyez le *Corpus inscriptionum græcarum*, t. 2, n. 2919, p. 583-584, et les notes de M. Bœckh sur cette inscription. M. Cantor se fait cette objection peu sérieuse, que chaque trait vertical peut être la lettre grecque I signifiant 1. Pour la notation phénicienne, comparez M. Pihan, p. 164.

Πέντε, 10 par le Δ de δέκα, 100 par le H de Ἑκατόν, 1000 par le X de Χίλιοι, 10000 par le M de Μύριοι, et qui rapprochait ces lettres par addition, ou bien les combinait par multiplication; 3° celui qui, pour exprimer les neuf nombres d'unités simples, les 9 nombres de dizaines et les 9 nombres de centaines, ajoutait aux 24 lettres de l'alphabet ionien trois caractères antiques pour les nombres 6, 90 et 900, et qui mettait à gauche de chacun des neuf premiers chiffres alphabétiques un petit trait incliné, pour les multiplier par 1000 et pour exprimer ainsi tous les nombres au dessous de 10000.

Malgré les doutes de MM. Nesselmann et Cantor, il est certain que dans les manuscrits et les éditions de l'ouvrage de Geminus de Rhodes, astronome grec du dernier siècle avant notre ère, le nombre 10000 et les nombres plus élevés sont exprimés par un petit trait incliné à gauche des chiffres alphabétiques ι, κ, λ, μ, etc. 4). Mais, en général, pour exprimer dans ce troisième système 10000 et les nombres plus grands, on employait le mot μυριάς avec les lettres numérales exprimant le nombre de myriades, ou bien on mettait avant, après ou sous ces lettres numérales la syllabe Μυ 5), ou simplement la majuscule initiale M, ou bien on remplaçait le M par un simple point écrit entre les myriades à gauche et les unités d'ordres inférieurs à droite.

Quant à l'usage, attribué aux Grecs par Camerarius, d'employer deux points au lieu d'un pour distinguer les myriades de myriades, et d'employer des points plus nombreux pour exprimer des ordres de myriades plus élevés encore, M. Cantor conteste avec raison l'antiquité de cet usage, emprunté à une des méthodes de notation numérale des Arabes 6).

Ensuite M. Cantor (p. 121-126) aborde la question de l'existence du zéro chez les Grecs: il la nie d'une manière absolue; mais, en expliquant cette négation, il accepte les faits qui la restreignent. En effet, les Grecs anciens n'ont pas eu du tout le vrai zéro, par son usage à la valeur de position décimale des chiffres. Seulement ils ont eu un signe qui, avec un usage différent, ressemblait au zéro par sa forme et par sa signification; car, lorsque l'astronome Ptolémée et son commentateur Théon d'Alexandrie indiquent des mesures d'arcs ou d'angles en degrés, minutes, secondes et tierces, si l'un de ces ordres de quantités manque, ils la marquent par lettre grecque ο, initiale du mot οὐδέν *(rien)*, la place de la quantité absente. Il est évident que ce n'est pas le zéro des Indiens, des Arabes et le nôtre, servant à marquer la place d'un ordre décimal d'unités qui manque dans un nombre simple. Tout ce qu'on peut dire, c'est que le ο de Ptolémée aurait pu suggérer l'idée du zéro véritable. Suivant la remarque de M. Wœpcke, les deux signes, avec deux formes distinctes, quoique peu différentes, et avec l'usage propre à chacun d'eux, ont coëxisté chez les Arabes orientaux, qui avaient emprunté le premier aux Grecs et le second aux Indiens 7).

---

4) M. Nesselmann (*Algebra der Griechen*, p. 79, note 23) et M. Cantor (p. 119), n'ayant pas pu se procurer un exemplaire de l'*Astronomie* de Geminus, refusent de croire Heilbronner (*Hist. Matheseos*, p. 728), qui dit avoir trouvé, au chapitre XV de cet ouvrage, le nombre 19756 ainsi exprimé. Au lieu d'un seul exemple, Heilbronner aurait pu en citer plusieurs semblables du même auteur. Voyez deux fois le nombre 16800, trois fois le nombre 21000 et deux fois le nombre 25200, écrits d'après ce procédé par Geminus dans le chap. XIII de son *Introduction aux phénomènes*, p. 51 de l'*Uranologium* de Pétau (Paris. 1630, in-fol.), ou p. 63-64 de l'édition d'Halma (II partie de sa *Chronologie de Ptolemée*, Paris, 1819, in-4); puis deux fois le nombre 19756 et trois fois le nombre 200312 dans le chapitre XV du même ouvrage, p. 62 de l'*Uranol.* de Pétau, ou p. 77 d'Halma. Ces deux éditeurs ont suivi le manuscrit de Paris. De plus, Pétau avait fait collationner avec le manuscrit d'Oxford la plus ancienne édition de Geminus, donnée par Hildéric (Altdorf, 1590, in-8) et reproduite à Leyde en 1603. Dans ces mêmes passages et dans un petit nombre d'autres, pour exprimer d'autres nombres audessus de 10000, Geminus emploie le mot μυριάδες en toutes lettres ou en abrégé. — 5) M. Cantor aurait pu ajouter que, dans les manuscrits du grand ouvrage astronomique de Ptolémée, une abréviation des lettres Μυ prend une forme légèrement concave en dessus, très large, presque sans hauteur, et ressemblant grossièrement à un υ minuscule au dessus d'un M majuscule dont le deux jambes seraient repliées en dessous, et que ce signe reçoit dans sa concavité supérieure les lettres numérales exprimant le nombre de myriades. Voyez ce signe abréviatif dans Heilbronner, *Hist. Matheseos*, p. 728. — 6) Voyez M. Wœpcke, *Mém. sur la propagation des chiffres indiens en occident*. (Paris, 1863, in-8), p. 63-66, note 1 de la p. 63. — 7) Voyez M. Wœpcke, *Mém. sur la propag. des chiffres ind.*, p. 132-136 et p. 154-156. Plus tard, les Arabes orientaux ont remplacé le zéro indien en forme de cercle par un simple point, parce qu'ils en étaient venus à donner à leur chiffre 5 une forme trop semblable à celle du zéro circulaire.

Cependant on a prétendu avoir trouvé chez les Grecs anciens le zéro proprement dit, lié à la valeur de position des chiffres. Niebuhr et Playfair ont cru lire les nombres 10, 100 et 14 exprimés par des chiffres semblables aux nôtres, dans un manuscrit grec palimpseste du VII[e] siècle de notre ère 8). Mais, suivant le désir exprimé par M. Cantor à M. le prince B. Boncompagni, ce manuscrit, qui contient un recueil de recettes pharmaceutiques, a été examiné de nouveau à Rome par M. le professeur Spezi, et il est maintenant certain que, de la part de Niebuhr et de Playfair, il y avait eu erreur de lecture et d'interprétation.

D'un autre côté, Ottfried Müller a trouvé dans l'acropole d'Athènes, et M. Bœckh a publié, une inscription lapidaire grecque mutilée, suivie de cinq colonnes verticales 9), dont chaque ligne est de deux lettres, et la lettre à gauche et toujours une de celles qui expriment un des dix premiers nombres, tandis que la lettre à droite est toujours une de celles qui expriment les dizaines dans le troisième des systèmes énumérés ci-dessus. Suivant M. Bœckh, lorsque l'I ou trait vertical se trouve à droite parmi les dizaines, c'est comme signifiant 10; mais, lorsque ce même signe se trouve à gauche parmi les unités simples, M. Bœckh veut que ce soit comme équivalant à notre zero, et qu'il soit mis là pour la symétrie seulement, sans que l'autre chiffre ait une valeur de position. M. Cantor pense, avec beaucoup de vraisemblance, que le signe I placé à gauche ne signifie pas zéro, mais une dizaine à ajouter aux dizaines marquées à sa droite. Ainsi, dans cette inscription l'on aurait divisé en deux parties les nombres de dizaines non accompagnés d'unités simples, afin d'avoir toujours deux chiffres, pour la symétrie. Par exemple, dans cette inscription, M signifiant 40, le nombre 42 s'écrit BM, et de même N signifiant 50, le nombre 51 s'écrit AN; mais le nombre 50 s'écrit IM, et le nombre 60 s'écrit IN, afin qu'il y ait toujours deux lettres. Nous avons vu que, de même, chez les Egyptiens, certains nombres ordinaux au dessous de 10, dans la notation hiératique des jours du mois, s'exprimaient par deux chiffres dont les valeurs s'additionnaient. M. Cantor cite aussi les Hébreux, qui pendant longtemps ont exprimé par la réunion de deux lettres les nombres de centaines au dessus de 500, et qui expriment 15 par la réunion du signe de 9 et du signe de 6, parce que les lettres numérales pour 10 et pour 5 formeraient le commencement du nom sacré de Jéhovah. M. Cantor ajoute d'autres exemples plus étranges, tirés d'une vieille glose franque sur la loi salique. Enfin il rappelle l'inscription grecque de Tralles, où le nombre 7 est exprimé par 7 traits verticaux, comme dans l'écriture hiéroglyphique des Egyptiens. Il aurait pu comparer aussi le procédé additif de la notation romaine.

En terminant ce chapitre, M. Cantor mentionne, sans les expliquer, les méthodes d'Appollonius et d'Archimède pour exprimer de très grands nombres: il y reviendra dans le chapitre X. Il dit un mot de la fausse hypothèse du célèbre Huet, qui voulait voir dans nos neuf chiffres des lettres de l'alphabet grec plus ou moins modifiées 10).

IX. L'Abacus 1).

Pour faciliter les calculs arithmétiques sans emploi de l'écriture, les Grecs, les Romains et d'autres peuples ont eu des instruments semblables entre eux par leur principe fondamental, mais différents par leurs dispositions.

L'une des variétés principales de cet instrument consiste en un cadre horizontal, sur lequel sont tendues des cordes parallèles, qui descendent vers le calculateur, et dont chacune porte neuf boules enfilées. chaque corde représente un ordre décimal d'unités; les boules réunies à un bout de la corde comptent, tandis que les boules réunies à l'autre bout ne comptent pas. M. Cantor explique avec clarté l'usage de cet

8) Ms. latin n. 24 du Vatican, venu du Palatinat. — 9) Voyez la figure 28 de planches de M. Cantor, qui se réfère (p. 134-135) au programme de l'université de Berlin, publié par M. Bœckh en 1841 pour le semestre d'été. — 10) Voyez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, p. 95-98 (Berlin, 1842, in-8). — 1) *Das Rechenbrett*, p. 126-130 de M. Cantor.

instrument, d'abord pour exprimer un nombre sur chaque cadre, ensuite pour additionner sur un troisième cadre deux nombres, exprimés sur deux autres cadres. Il montre qu'avec cet instrument les opérations arithmétiques peuvent commencer indifféremment par un ordre quelconque d'unités, parce que les changements à apporter au nombre des boules au bout de chaque corde sont toujours faciles, tandis que dans les calculs écrits il faudrait surcharger les chiffres, si l'on commençait les additions, les soustractions et les multiplications par la gauche, ou bien les divisions par la droite. Il fait voir aussi comment, malgré la valeur de position des boules, suivant la corde où elles se trouvent, on a pu employer cet instrument sans être amené à appliquer la valeur de position à des chiffres écrits. En effet, dans l'écriture, on manquait d'un signe remplissant l'office de la corde vacante, pour marquer les ordres décimaux d'unités qui manquaient dans le nombre à exprimer, et pour conserver ainsi aux chiffres leur ordre et leur valeur de position.

Cet instrument, tel que nous venons de le décrire 2), est le *tschotu* des Russes, introduit en France, depuis la campagne de Russie, dans les petites écoles de Metz, sous le nom de *boulier*. C'est aussi, sauf quelques différences, le *Suan-pan* des Chinois et des Tartares, dont chaque corde porte dans une de ses moitiés cinq boules ordinaires, et dans l'autre moitié deux boules, dont chacune vaut 5.

Maintenant remplacez le cadre par une tablette, de même horizontale, les cordes par des colonnes séparées par des rainures tracées sur la tablette, les boules enfilées par des jetons libres, et donnez aux jetons une valeur de position décimale suivant la colonne où vous les placerez : voilà un *abacus* bien connu des Grecs. L'invention de cet instrument est-elle plus ancienne ou plus récente que celle du cadre avec les boules enfilées ? M. Cantor n'ose pas trancher cette question ; mais il remarque avec raison que l'instrument à boules enfilées était à la fois plus commode et moins susceptible de perfectionnements.

Une tablette rectangulaire de marbre, trouvée à Salamine en 1846 par M. Rangabé, expliquée d'abord par l'auteur de la découverte, puis par M. Letronne, et enfin d'une manière plus juste et plus complète par M. Vincent 3), offre une combinaison d'un abacus avec un jeu analogue au trictrac. M. Cantor (p. 132-133 et 136-137) répète, comme très vraisemblable, l'explication des dix colonnes de cette tablette, telle que M. Vincent l'a donnée, et il n'y trouve à changer qu'un point, dit-il, peu important, savoir le partage des colonnes entre les deux joueurs principaux. Chacun d'eux, placé devant un des deux grands côtés perpendiculaires à la longueur des colonnes tracées, avait pour sa part, à sa droite suivant M. Vincent, à sa gauche suivant M. Cantor, cinq colonnes divisées chacune en deux moitiés savoir : une colonne dont les jetons, suivant la moitié où on les mettait, valaient chacun une drachme ou cinq drachmes, une autre colonne où les jetons valaient chacun 10 drachmes ou 50 drachmes, une où ils valaient 100 drachmes ou 500, une où ils valaient 1000 ou 5000, et une où ils valaient un talent (6000 drachmes) ou 5 talents. En outre, quatre autres colonnes non divisées en deux moitiés se trouvaient à quelque distance des dix autres, vers l'autre bout de la tablette : elles devaient servir pour le calcul des oboles, demi-oboles, tiers d'oboles et sixièmes d'oboles 4).

---

2) La comparaison que M. Cantor fait (p. 130-131) de cet instrument avec les *Kouas* des Chinois, avec les *Quippos* des Péruviens, avec les chapelets des catholiques et avec ceux des Bouddhistes, avec les *Akshamâlâ* des Brahmanes, et avec les *moulins à prière* des Kalmoucks, me paraît forcée et inutile. — 3) *Revue archéologique*, III année, p. 295-304, p. 306-308, et p. 401-405. — 4) Dans un épisode (p. 131-136), M. Cantor combat avec succès l'opinion de M. de Humboldt, qui avait cru trouver dans le nom de *chambre de l'échiquier*, donné aux cours des comptes en France et en Angleterre, une allusion à l'emploi de l'*abacus*. M. Cantor explique fort bien que ce nom venait des colonnes verticales et horizontales, formées par des lignes qui s'entrecoupaient sur chaque feuillet des registres, de manière à offrir l'aspect des cases d'un échiquier, et que, par cette disposition, avec des noms d'homme placés à gauche des colonnes horizontales pour les dettes et répétés au bas des colonnes verticales pour les créances actives des mêmes personnages, on obtenait, par un compte simple, les résultats qu'on demande maintenant à un compte en partie double. Dans ce même épisode de M. Cantor, se trouvent insérés quelques détails curieux sur l'histoire et la fin tragique des *baguettes à entailles (tallies)*, dont la cour de l'échiquier d'Angleterre se servait pour ses comptes

Ensuite M. Cantor (p. 138-139) décrit les abacus qui nous restent de l'antiquité romaine. Sur ces tablettes métalliques, dont plusieurs exemplaires se sont conservés, on voit 8 rainures longues, et 8 rainures plus courtes qui se trouvent à quelque distance sur le prolongement des premières. Dans chaque rainure sont insérées de petites fiches métalliques glissant à volonté d'un bout de la rainure à l'autre et portant chacune un bouton. La première rainure longue, à droite, porte 5 boutons mobiles, qui désignent 5 onces, c'est-à-dire 5 douzièmes d'as. Dans la première petite rainure correspondante, il y a un seul bouton, représentant 6 onces. Les boutons qui sont au nombre de 4 dans chacune des grandes rainures suivantes, représentent des as dans la première, des dizaines d'as dans la seconde, des centaines d'as dans la troisième, et ainsi de suite jusqu'aux millions d'as. Le bouton unique de chacune des rainures courtes vaut cinq boutons de la grande rainure correspondante. Il est aisé de comprendre qu'ainsi, avec ces 41 boutons, qui ne comptaient que lorsqu'ils étaient poussés vers un des bouts de la rainure, on pouvait exprimer tous les nombres d'onces au dessous de 12, et tous les nombres d'as au dessous de 10000000. Sur le côté droit de la tablette, trois rainures courtes servaient pour les fractions d'onces, savoir: la première avec un seul bouton pour la demi-once, la seconde avec un seul bouton pour le quart d'once, et la troisième avec deux boutons pour les tiers d'onces.

X. L'Abacus (suite) 1).

Nous avons vu que sur la tablette de Salamine, au lieu des boutons fixés à des fiches qui glissaient dans les rainures de l'abacus romain, on devait employer des jetons, qu'on plaçait à volonté dans les 10 colonnes séparées par les rainures. Ce procédé était connu aussi à Rome, comme le prouve ce vers où Horace 2) nous montre des écoliers portant suspendus au bras gauche l'*abacus (tabulam)* et les *boites à jetons (loculos)*. Un procédé plus simple encore consistait à tracer les colonnes avec le doigt sur un *abacus* sans rainures, mais couvert de poussière ou de sable fin, et à placer ensuite les jetons sur les colonnes ainsi tracées, ou bien à y écrire les nombres avec le doigt. C'est là sans doute ce que Perse 3) appelle les *nombres sur l'abacus (abaco numeros)* et les *lignes de séparation marquées sur la poussière (sectoque in pulvere metas)*.

Pour établir que l'*abacus* sans rainures était antique chez les Grecs, M. Cantor (p. 142) cite Jamblique, qui dans sa *Vie de Pythagore* 4), nous montre ce philosophe initiant un jeune homme à l'arithmétique et à la géométrie par des démonstrations et par des figures tracées sur l'ἄβαξ. M. Cantor aurait pu citer aussi Eustathe 5), qui dit que l'ἄβαξ est utile aux philosophes et qu'ils y tracent des figures. Pour prouver que les figures et les nombres étaient tracés sur la poussière dont l'ἄβαξ était couvert, M. Cantor (p. 141, l. 26-30) ne trouve à alléguer qu'une comparaison employée par Boèce 6), mais dans laquelle on peut voir tout au plus une allusion douteuse. Voici les textes qu'il aurait fallu citer: Jamblique, dans son *Exhortation à la philosophie* 7), dit expressément que l'ἄβαξ des Pythagoriciens était une tablette couverte de poussière, et Cicéron 8) parle de la *poussière savante* des géomètres. Il est donc possible que le nom de *table de Pythagore* ait été donné primitivement à un ἄβαξ couvert de poussière, dont Pythagore aurait inventé ou perfectionné l'usage.

Une invention si simple pouvait se faire en Grèce aussi bien qu'en Babylonie. Cependant M. Cantor veut que Pythagore l'ait apportée de Babylone. Aucun auteur ancien n'appuie cette supposition. Mais M. Cantor croit en trouver la preuve dans le mot grec ἄβαξ, qui, dit-il, a certainement une origine sé-

---

1) *Das Rechenbrett (Fortsetzung)*, p. 140-164 de M. Cantor. — 2) *Satires*, I, 6, v. 74. — 3) *Sat.* I, v. 132. — 4) Chap. 5, p. 17-18 de Küster. — 5) *Sur l'Odyssée*, p. 1397, l. 50 (éd. rom.). — 6) *Geom.* I, p. 1518 (Œuvres, Bâle, 1570, in-fol.) Boèce parle de petites pièces mobiles *(apices)* qui portaient les chiffres et qu'on dispersait *comme de la poussière* sur l'abacus des Pythagoriciens, pour effectuer la multiplication et la division. — 7) *Symbole* XXXIV, p. 158 (éd. Arcerius). — 8) *De nat. deor.*, II, 18.

mitique. En effet, d'après une étymologie proposée par des hommes très savants 9), les mots *ἄβαξ* et ***abacus***, viendraient d'***abak***, mot arabe qui signifie ***poussière***. Au contraire, j'espère démontrer que le mot ἄβαξ, très ancien dans la langue grecque, appartient par son étymologie à cette langue même, et non à l'arabe ou à une autre langue sémitique, et que ce mot ne signifie pas ***poussière***.

Le mot ἄβαξ n'est pas isolé dans la langue grecque: il a dans cette langue des dérivés, ἀβάκιον et ἀβακίσκος, et il y dérive lui-même d'un radical, que des étymologistes grecs ont signalé et que nous indiquerons après eux. Ce mot ἄβαξ et ses dérivés ont des significations très diverses: celle de ***tablette pour le calcul*** en est une, mais non la principale; elle est la seule à laquelle la notion de ***poussière*** puisse être rattachée. Toutes ces significations s'expliquent par une étymologie grecque, qui en marque la liaison, et à laquelle l'idée de ***poussière*** est tout-à-fait étrangère. Orion de Thèbes, lexicographe grec du Ve siècle, et le ***grand Étymologique***, glossaire grec rédigé par un byzantin d'après les travaux des grammairiens grecs d'Alexandrie, disent 10): Ἄβαξ, κυρίως ὁ μὴ ἔχων βάσιν, c'est-à-dire: Ἄβαξ, au ***sens propre ce qui n'a pas de pied, de support***. Ainsi ἄβαξ vient de α privatif et du radical des mots grecs βάσις et βαίνω 11). Le lexicographe ajoute que ce mot se dit de toute ***planchette*** (σανίς). Nous allons voir qu'en effet tout objet nommé par les Grecs ἄβαξ était une planchette, un plateau, ou un vase ***sans pied***. Ce nom convenait donc à l'***abacus*** à rainures ou à jetons, tout aussi bien qu'à l'abacus couvert de poussière; l'***abacus***, à pièces mobiles nommées ***apices*** n'avait pas besoin d'être couvert de poussière: c'était cet ***abacus*** que Boèce 12) nommait ***table de Pythagore***, et son nom latin ***abacus*** était la traduction du nom grec ἄβαξ. Les deux meubles essentiels du banquier grec étaient, suivant les expressions de l'orateur Lysias 13), la ***table à trois pieds*** (τράπεζα) et la ***tablette sans pied*** (ἀβάκιον): celle-ci servait pour les calculs, et, n'***ayant pas de support*** adhérent, elle se posait sur la table du banquier à côté de l'argent. Les deux noms qu'on lui donnait, ἄβαξ ou ἀβάκιον 14), la désignaient comme une planchette ***sans support***. Pour la même raison, l'on nommait en grec ἄβαξ ou ἀβάκιον une sorte de damier pour les jeux de dés 15); l'on nommait ἄβαξ un plateau sur lequel on plaçait des objets précieux 16); en termes d'architecture, on nommait en latin ***abacus*** un plateau carré qui se posait sur les chapiteaux des colonnes 17); on nommait en grec ἀβακίσκοι des carreaux de bois, de pierre ou de marbre pour paver l'intérieur des maisons 18); on donnait le nom d'ἄβαξ à une corbeille ronde sans support 19) et à un plat rond sans support, lequel plat se nommait aussi δισκός 20); on donnait le nom d'ἀβάκιον à un pétrin qui n'était pas porté sur des pieds 21). Ces derniers objets n'avaient aucun rapport ni de forme ni d'usage avec la ta-

---

9) Voyez Étienne Guichart, M. Vincent, M. Nesselmann et M. Friedlein (cités par M. Cantor, notes 273 et 275) et M. Cantor lui-même (p. 141). — 10) Voyez Orion de Thèbes, p. 15 *b*, l. 18 (éd. Sturz), et l'*Etymologicum Magnum*, p. 2, l. 10 (ed. Sylburg). Voyez aussi l'*Etymologicum Gudianum*, au même mot, p. 1 (éd. Sturz). — 11) Comparez Van Lennep et Scheid, *Ethymologicum linguae graecae*, t. I, p. 11-12 (Utrecht, 1790, gr. in-8); Eustathe, *Sur l'Odyssée*, p. 1404, l. 61-65 (éd. rom.), et l'*Ethymologicum magnum* aux mots ἄβαξ, βαβάκτης et βάβαξ. Le mot βάσις vient de βαίνω. Mais d'où vient le ξ dans ἄβαξ? Ce ξ s'explique par la confusion des formes dérivées de βαίνω et de βάζω. Ainsi βιβάζω vient de βαίνω, comme le sens l'indique. Il est vrai que ce verbe donne βιβάσω et βίβασις par un σ et non par un ξ; mais βάκτρον, dérivé de βαίνω, a le κ, qui justifie le ξ du mot ἄβαξ. Le mot βάκη des lexicographes grecs, et le mot laconien βαβύξ, qui tous deux signifiaient *pont* et qui ont l'un le κ et l'autre le ξ, sont de même dérivés de βαίνω. Les mots βάβαξ et βαβάκτης signifiaient *parleur*, comme dérivés de βάζω, et *sauteur*, comme dérivés de βαίνω. Il ne faut donc pas s'étonner de voir qu'outre le mot ἄβαξ pris dans le sens ordinaire, Eustathe et les lexicographes grecs aient distingué un autre mot ἄβαξ, dérivé de βάζω et synonyme de ἀβακής, *infans*, *enfant qui ne parle pas encore*. — 12) Voyez ci-après, chap. XII-XVI. — 13) Dans Julius Pollux, *Onomasticon*, X, 105. — 14) Outre les trois passages déjà cités de Jamblique et celui de Lysias, Voyez Polybe, V, 26, n. 13; Plutarque, *Caton le jeune*, chap. 70; le grammairien Ammonius, p. 1, et Eustathe, *sur l'Odyssée*, p. 1404, l. 65 (éd. rom.). — 15) Voyez Athénée, X, p 435 D; Julius Pollux, *Onom.*, VII, 203, et X, 150; Macrobe, *Saturn.*, I, 5; Eustathe, *Sur l'Odyssée*, p. 1393, l. 63, et p. 1397, l. 49-50; le *Grand Etymologique*, au mot πεσσοί, p. 666, l. 16, et un grammairien dans les *Anecd. graeca* de Bekker, t. 1, p. 323. — 16) Voyez Ammonius, p. 1. — 17) Vitruve, IV, 1. — 18) Moschion, dans Athénée, V, p. 207 *c*, et Eustathe, *Sur l'Odyssée*, X, p. 1927, l. 81. — 19) Julius Pollux, *Onom.*, VI, 86, et X, 105. — 20) Julius Pollux, VI, 84 et 90; X, 105-106, et Phrynichus, dans Bekker, *Anecd. gr.*, t. I, p. 17. — 21) Voyez Hesychius, *Lex.*, au mot ἀβάκιον.

blette à calculer. Quelques uns des premiers avaient avec cette tablette certains rapports, soit d'usage, soit de forme; mais aucun n'avait pour accessoire utile la *poussière*, exprimée par le mot arabe où l'on est allé chercher si mal à propos l'étymologie du nom qui leur est commun avec l'*abacus*. Ainsi ἄβαξ, avec ses dérivés ἀβάκιον, ἀβακίσκος, et en latin *abacus*, est un nom grec d'origine. La tablette à calculer désignée par un des sens de ce mot, était probablement très antique en Grèce. L'invention de l'ἀβάκιον qui servait à compter les points au jeu de dés est attribuée à Palamède par une tradition qu'Eustathe 22) a répétée. Polybe 23) compare les courtisans aux jetons, dont la valeur dépend de la position que le calculateur leur donne sur l'ἀβάκιον, et Diogène de Laërte 24) fait remonter jusqu'à Solon l'invention de cette comparaison ingénieuse. Si l'instrument n'est pas grec d'origine, le nom du moins l'est certainement : il signifie *tablette sans pied*, et rien de plus.

M. Cantor est donc mal fondé à affirmer, comme il le fait (p. 141-142), que le nom soit venu très anciennement aux Grecs des peuples sémitiques, et à en conclure que l'instrument doit avoir la même origine. Il n'est pas mieux fondé à supposer, comme il le fait aussi (p. 140-143), qu'ensuite Pythagore ait apporté d'Egypte ou de Babylonie un perfectionnement de l'abacus, savoir, l'emploi des neuf chiffres des Boèce. Mais c'est-là une question sur laquelle il faudra revenir 25).

Par une savante discussion, M. Cantor (p. 143-146) établit, contre M. Friedlein, que dans l'antiquité, sur toutes les variétés de l'abacus, les colonnes marquant la valeur de position descendaient vers le calculateur, de sorte que la valeur de position variait de gauche à droite, et de droite à gauche, comme pour nos chiffres écrits, et non de bas en haut et de haut en bas, comme pour les boules enfilées dans les cordes horizontales du *boulier* moderne. M. Cantor prouve que l'usage du calcul par jetons sur plusieurs lignes horizontales avec valeur de position croissante de bas en haut, ne s'est établi qu'après le XIIe siècle de notre ère.

Quant à la cause de ce changement, M. Cantor ne l'a pas cherchée. Je crois pouvoir l'indiquer. Les cordes du *tschotu* des Russes ou du *suan-pan* des Chinois, et les rainures de l'ἄβαξ des Grecs et de l'*abacus* des Romains, ou bien les colonnes tracées sur ces instruments couverts de sable, allaient de haut en bas vers le calculateur, de sorte que la valeur de position variait de gauche à droite. Mais, pour qu'il en fût ainsi, il fallait que l'instrument fût posé horizontalement sur la table devant laquelle le calculateur était placé. Quand, au contraire, probablement pour la facilité de l'enseignement devant de nombreux élèves, on a voulu placer verticalement le cadre ou la tablette, en les suspendant à un mur, les lois de la pesanteur ont ordonné de rendre horizontales les cordes le long desquelles on poussait les boules enfilées, ou bien les rainures dans lesquelles on faisait glisser les fiches garnies chacune d'un bouton 26). Ensuite les lignes marquées sur un tableau pour le calcul par jetons ont été tracées horizontalement, à l'imitation de la nouvelle disposition de l'instrument à rainures, et peut-être aussi à l'imitation des portées musicales, imaginées au XIIe siècle par Guido d'Arezzo.

Avant d'aborder la question du nombre des colonnes de l'abacus chez les différents peuples, M. Cantor (p. 146-148) essaie d'en préparer la solution par des observations sur les noms de nombre.

Tous les peuples dont il a été question dans cet ouvrage ont un mot particulier pour le nombre 1000. M. Cantor ajoute que, pour signifier vaguement un nombre très grand, plusieurs de ces peuples disent *mille*.

M. Cantor remarque que les Romains, outre le mot *mille*, employaient dans ce même sens le mot *sexcenti (six cents)*. Il ajoute que ce fait s'expliquerait mieux, si l'on pouvait constater chez les Romains les traces d'un système non décimal, comme on en rencontre chez les peuples germaniques, par exemple chez les Allemands, qui ont le mot *Mandel* pour 15, et le mot *Schock* pour 60; chez les Scandinaves,

---

22) *Sur l'Odyssée*, p. 1396, l. 63. Voyez aussi le *Grand Etymologique*, au mot μισσοί — 23) V, 26, n. 13. — 24) I, 59. — 25) Voyez ci-après, chap. XVI et XVII. — 26) Cette disposition horizontale avec valeur de position est celle des rangées de boules enfilées qui servent en France à compter les points des joueurs de billard.

qui, outre le *petit cent (litlshundrud)* ou centaine ordinaire, ont un *grand cent (Storhundrud)* de 120; et chez les Anglosaxons, qui outre le *petit mille* ou millier ordinaire, avaient un *grand mille* de 1200.

Quant au nombre *dix mille*, les Latins, les Arabes et les peuples modernes de l'Europe l'expriment par deux mots; mais les Grecs, les Egyptiens, les Babyloniens, les Indiens et les Chinois l'expriment par un seul mot. Le mot μύριοι *(dix-mille)* était celui que les Grecs employaient pour exprimer vaguement un nombre très grand, tandis que, pour les Hébreux et les Chinois, le mot signifiant *dix-mille* désignait vaguement un nombre plus grand encore que celui qu'ils désignaient vaguement par le mot signifiant *mille*.

M. Cantor aurait pu compléter ces utiles remarques, s'il avait eu recours aux recherches de MM. Lepsius et Benlœw 27) sur l'étymologie des noms de nombre. Il y aurait vu que, chez les peuples indo-européens et chez les peuples sémitiques, lorsque le nombre 1000, le nombre 10000 et des puissances plus élevées de 10 s'expriment par un seul mot dans la langue d'un de ces peuples, chacun de ces mots, par son étymologie signifie vaguement *multitude*, et que chez quelques peuples il en est de même du mot qui signifie *cent*. Il est donc probable que des mots qui primitivement signifiaient un nombre incalculable ont pris une signification précise, à mesure que la faculté de nombres a fait des progrès 28).

M. Cantor (p. 148-151) s'occupe ensuite du groupement des nombres, tel qu'il peut être exprimé par la séparation de nos chiffres en tranches. La *myriade* (1000) étant le plus grand nombre pour lequel la langue grecque eût un mot et pour lequel l'alphabet grec offrît un signe numéral particulier, il était naturel aux Grecs de prendre la myriade pour unité nouvelle, et de compter jusqu'à 9999 myriades, puis d'opérer de même pour les *myriades de myriades*, et ainsi de suite: tel était le procédé d'Apollonius de Perga 29), procédé qu'on représenterait dans notre numération moderne par la division en tranches de quatre chiffres au lieu de trois. Apollonius donnait aux unités de notre première tranche de quatre chiffres le nom de μονάδες *(unités)*, à celles de la seconde tranche le nom de μυριάδες ἁπλαῖ *(myriades simples)* et le signe abréviatif Mα, à celles de la troisième tranche le nom de μυριάδες διπλαῖ *(myriades doubles)* et le signe Mβ, et ainsi de suite.

Pour réfuter ceux qui confondaient l'*infini* avec l'*incalculable*, Archimède voulut montrer qu'on pouvait exprimer d'une manière précise par la langue et l'écriture grecques, et distinguer nettement les uns des autres, de grands nombres considérés faussement comme inexprimables et infinis. Pour cet usage spécial, comme M. Chasles l'a montré, et non pour simplifier l'arithmétique grecque, comme M. Libri l'a prétendu, Archimède 30) avait imaginé de prendre pour unité nouvelle, au lieu de la *myriade simple*, la *myriade de myriades*, d'aller jusqu'à une myriade de myriades de cette nouvelle unité et d'en faire unité supérieure, et ainsi de suite: « ce qui équivaudrait, dans notre notation moderne, à la division en tranches de huit chiffres. Il nommait *premiers nombres* ceux de la première tranche de huit chiffres, seconds nombres ceux de la seconde, et ainsi de suite jusqu'à une myriade de myriades de tranches de huit chiffres: l'ensemble de ces tranches formait une *première période*.

L'unité simple des *premiers nombres* de la *seconde période*, équivalait à notre unité suivie de 800 millions de zéros. Archimède ajoutait qu'on pouvait continuer ainsi jusqu'à une myriade de myriades de périodes: ce qui équivaudrait à mettre à droite de notre chiffre 1 une série de 80 trillions de zéros 31). Ainsi Archimède avait résolu le problème de trouver dans la langue grecque une expression précise et courte pour des nombres qui offraient l'imagination 32): il y avait réussi de manière à montrer qu'un nombre *réel*, quelque grand qu'il soit, est toujours exprimable et *fini*, et que l'*infini* est toujours infini-

27) Ouvrages cités ci-dessus, Introduction, notes 6 et 7. — 28) Voyez M. Lepsius, p. 138-141, et M. Benlœw, p. 62-78. — 29) Voyez Pappus, *Collect. math.*, fragment du livre II, prop. 15-27, gr. lat., dans le t. 3 des Œuvres de Wallis, p. 595-610 (Oxford, 1699, in-fol.). — 30) *Arénaire*, p. 319-332 des Œuvres, éd. Torelli (Oxford, 1792, in-fol.). — 31) M. Cantor (p. 151) dit: « 80000 *Billionen* ». Mais 80000 *billions allemands* équivalent à 80 *trillions français*; car, comme le dit M. Cantor (p. 236), le *billion allemand* équivaut à l'unité suivie de 12 zéros, c'est-à-dire à un *million de millions*, tandisque le *billion* français équivaut à l'unité suivie de 9 zéros seulement, c'est-à-dire à *mille millions*. — 32) Nous avons vu (chapitre IV) qu'à la même époque les Indiens avaient résolu le même problème d'une manière semblable, avec cette différence, qu'ils désignaient par un seul mot chacune de ces unités supérieures.

ment au delà. Il n'était pas de ces philosophes qui croient pouvoir imaginer un *tout infini réellement existant* et composé d'un *nombre infini de quantités finies* 33).

La numération d'Apollonius par myriades, puis par myriades de myriades, et ainsi de suite, avait une application pratique exposée par M. Cantor d'après Pappus, qui nous l'a conservée. Pour faire le produit de deux ou plusieurs facteurs multiples de puissances de 10, le procédé d'Apollonius consiste à mettre à part ces puissances de 10 comme facteurs, à faire la multiplication des nombres proposés, après les avoir dégagés de ces facteurs, et à tenir compte ensuite de ceux-ci, pour déterminer l'ordre de myriades auquel appartiendra l'unité simple du produit trouvé d'abord. Dans notre notation actuelle, ce procédé revient à supprimer les zéros à droite des facteurs avant la multiplication, et à les ajouter tous à droite du produit. Mais, avec la notation grecque sans valeur de position, c'était plus compliqué; car, pour supprimer les puissances de 10 comme facteurs dans les nombres à multiplier, et pour les rétablir ensuite dans le produit, il fallait changer toutes les lettres numérales dans chacune de ces deux opérations. Du reste, cette méthode, enseignée par Apollonius deux siècles avant notre ère, ne paraît pas s'être propagée chez les Grecs. Suivant la remarque de M. Cantor, au Ve siècle de notre ère, Eutocius 34) opère la multiplication avec les facteurs tels qu'ils se présentent, lors même qu'ils sont multiples de 10: il commence les multiplications par la gauche, en plaçant les uns sous les autres les produits partiels et en les additionnant à la fin. Mais M. Cantor aurait dû ajouter que dans ces exemples d'Eutocius, chaque facteur n'étant multiple que de 10 et non d'une haute puissance de 10, l'emploi du procédé d'Apollonius aurait été sans utilité. Il aurait dû ajouter aussi que probablement Apollonius, comme Eutocius, commençait la multiplication par la gauche.

Les Romains, pour lesquel *mille* était le plus grand nombre exprimé par un seul mots et par un seul signe numéral, avaient naturellement dans l'expression des nombres, un mode de groupement qui procédait par milliers, comme le mode grec procédait par myriades. M. Cantor aurait bien fait d'annoncer ici, sauf à y revenir (chapitre XIII), que l'abacus de Boèce, par la réunion de ses colonnes trois à trois, portait l'empreinte de ce caractère de la numération parlée des Romains. Au XIIIe siècle, par exemple dans deux opuscules de Jean de Holywood (Sacrobosco), ce même caractère s'était traduit dans notre notation moderne par la division en tranches de trois chiffres, marquées par un point au-dessus du premier chiffre de chaque tranche. Au milieu du XVIe siècle, ce point se mettait au-dessous, ou bien le chiffre était précédé d'un trait. Au XVIIe siècle, on remplaçait le trait par une virgule. Mais ce dernier usage lui-même ne s'est pas établi d'une manière invariable, à cause de la confusion trop facile entre la virgule qui sépare les tranches, et celle qui sépare le nombre entier de la fraction décimale qui peut l'accompagner.

Tous ces détails que M. Cantor donne ici sur l'arithmétique des Grecs et des Romains, auraient pu trouver une place plus naturelle dans les chapitres consacrés aux signes numéraux de ces deux peuples, c'est-à-dire les uns dans le chapitre VIII, les autres dans le chapitre XI, qui lui-même aurait dû venir immédiatement après le chapitre VIII.

Tout cela nous a bien éloignés de l'étude de l'*abacus* et du nombre de ses colonnes, d'autant plus qu'en réalité ce nombre est déterminé par des motifs tout autres que ceux que M. Cantor a cherchés. L'abacus romain a sept colonnes pour les nombres entiers suivant M. Cantor, c'est parceque, les tranches étant de trois ordres d'unité, on a voulu s'arrêter *après* la première colonne de la troisième tranche. Mais cette considération aurait dû engager à s'arrêter *avant* cette septième colonne, et à n'en mettre que six, c'est-à-dire deux tranches entières. D'après cette même considération des tranches, l'abacus grec, procédant par tranches de quatre colonnes, aurait dû avoir 8 colonnes pour les nombres entiers, ou bien en avoir 12, c'est-à-dire une tranche de plus. En réalité, il avait 10 colonnes et quelquefois 11. Que conclure de là, sinon que chaque peuple a donné à son *abacus* le nombre de colonnes qui lui a paru suffire pour les besoins du calcul?

---

33) Contre cette erreur, voyez mon *Examen d'un problème de théodicée* (Paris, 1850, in-8, 105 pages). — 34) Sur Archimède, *De la mesure du cercle*, p. 218 (éd. Torelli).

XI. Signes numéraux des Romains. 1)

M. Cantor rappelle que chez les Romains les nombres exprimés par une seule lettre sont, d'une part 1 = I, 10 = X, 100 = C, 1000 = M ou CIↃ ou ∞; d'autre part 5 = V, 50 = L, et 500 = D. Les ordres d'unités supérieurs à 1000 sont représentés par des signes numéraux plus ou moins compliqués, savoir: d'une part 10000 = CCIↃↃ, 100000 = CCCIↃↃↃ, 1000000 = C∞Ↄ; d'autre part 5000 = IↃↃ, 50000 = IↃↃↃ, et 500000 = cı· Ainsi l'ordre d'unités le plus élevé qui soit représenté par un signe alphabétique simple est *mille*, et le nombre le plus élevé qui soit représenté par un signe complexe est le *million*, qui est précisément l'unité de la septième et dernière colonne de l'*abacus* romain 2).

Dans la notation numérale des Romains, comme dans celle de la plupart des peuples qui n'emploient pas la valeur de position, les signes de nombres plus petits, placés à la droite des signes de nombres plus grands, indiquent l'addition à faire de ces nombres. Chez les Romains, le petit nombre dont le signe est placé à la gauche de celui d'un plus grand nombre doit en être retranché, tandisque dans la notation cunéiforme il le multiplie 3). Pourtant, comme M. Cantor l'explique, cet emploi de la soustraction dans la notation des nombres se bornait chez les Romains à quelques cas déterminés. La soustraction n'avait jamais lieu devant M signifiant 1000, et quand le signe d'un petit nombre était à gauche de M, c'était comme multiplicateur. Ainsi XM = 10000, CM = 100000. Quant à l'expression MM, elle indiquait tantôt 2000 par addition, tantôt un million par multiplication, et le choix entre ces deux explications ne pouvait être indiqué que par le sens. Cette amphibologie n'existait pas dans l'autre mode de notation marqué ci-dessus pour les millions. Quelquefois on remplaçait la lettre M par une barre horizontale au-dessus ou par un point à droite des lettres numérales exprimant le nombre de milliers; mais nous verrons qu'au lieu de milliers c'étaient quelquefois des centaines qui y étaient ainsi exprimées.

Sur l'origine des signes numéraux des Romains, M. Cantor commence par écarter les explications discordantes et presque toutes absurdes que Priscien donne pour les sept signes I, X, C, M, V, L et D; il écarte de même l'explication ingénieuse de Ramus et d'Hostus. Au lieu d'inventer, comme ces deux derniers, des formes primitives imaginaires, il faut remonter aux formes les plus anciennes qu'on trouve réellement pour ces signes numéraux tant chez les Romains que chez les Etrusques. Or Ramus et Hostus auraient en vain cherché dans chacune de ces formes anciennes un nombre de traits rectilignes indiquant le nombre exprimé; mais ces formes anciennes offrent un rapport frappant avec les formes anciennes de certaines lettres de l'alphabet romain et de l'alphabet étrusque 4). Pourtant, parmi les lettres numérales des Romains, il y en a qui ne sont pas les initiales des noms latins des nombres qu'elles représentent, et ces nombres ne répondent pas non plus au rang que les lettres correspondantes occupent

---

1) *Die Zahlzeichen der Rœmer*, p. 155-167 de M. Cantor. — 2) Voyez le chapitre précédent. — 3) Voyez ci-dessus, chap. II. A cette occasion, M. Cantor remarque incidemment que les nombres 1 et 2 à soustraire entrent souvent dans le langage des Romains et des Grecs, comme dans le mot *duodeviginti* pour 18. Il en est de même pour la soustraction de 1 et même de 5 en sanskrit. En allemand l'expression de certains nombres procède quelquefois par division, et M. Cantor aurait pu ajouter qu'il en est de même en français, puisqu'on dit une *demi-douzaine*, un *demi-cent*, un *demi-millier*. Pour l'expression des nombres fractionnaires, en latin, en grec et en allemand, on procède par l'addition jointe à la division, mais diversement. En allemand on dit *second-demi*, *troisième-demi*, *sixième-demi (anderthalb, dritthalb, sechstehalb)*, pour signifier 1/2 précédé de 1, 2, 5 unités entières, et par conséquent 1 1/2, 2 1/2, 5 1/2. En latin et en grec, on sous-entend l'unité et on dit *demi en plus*, *tiers en plus*, *huitième en plus*, pour signifier 1 1/2, 1 1/3, 1 1/8. Dans langue malaise, pour exprimer un nombre qui se termine par 5, on met le mot *moitié* devant l'expression du nombre plus grand de 5 unités; ainsi l'on dit *moitié* 40, pour dire 35, c'est-à-dire 40 moins la moitié de la dernière dizaine. — 4) Suivant M. Cantor, l'alphabet romain est venu de l'alphabet grec, à une époque où celui-ci gardait encore le *Koppa*, inconnu aux Etrusques; l'alphabet étrusque, venu immédiatement de l'orient comme l'alphabet grec, possédait des lettres qui manquaient à l'alphabet romain; mais l'alphabet romain et l'alphabet étrusque s'étaient modifiés par des influences étrangères.

dans l'alphabet latin. M. Cantor conclut de cette observation qu'il faut désespérer d'expliquer la cause pour laquelle certaines lettres romaines ont été choisies pour exprimer certains nombres.

Cette conclusion négative me paraît prématurée. La figure 35 des planches de M. Cantor montre que pour chacun des nombres 1, 5 et 10, et même pour le nombre 50, le signe ordinaire des Romains dérive de leur signe plus ancien, et que celui-ci dérive du signe étrusque. Ainsi, pour expliquer les signes romains de ces nombres, ce n'est pas à l'alphabet et à la langue des Romains, mais à l'alphabet et à la langue des Etrusques, qu'il faut recourir. Or, quels étaient les rangs des lettres dans l'antique alphabet des Etrusques, et quels étaient, sous leur forme la plus ancienne, les noms étrusques pour les nombres? Si l'on pouvait donner une réponse précise et sûre à chacune de ces deux questions, peut-être trouverait-on dans l'une de ces deux réponses, ou bien en partie dans l'une et en partie dans l'autre, l'explication vainement cherchée ailleurs. Ensuite, pour les nombres 100 et 1000, les signes romains ordinaires, C et M, sont les lettres initiales de *centum* et de *mille*, comme M. Cantor l'a bien remarqué; mais les signes plus anciens pour ces mêmes nombres ne ressemblent pas aux formes anciennes de ces deux lettres. Quant aux signes pour 10000 et pour 100000, M. Cantor a bien vu que, par diverses complications, ils dérivent de la plus ancienne forme du signe romain pour 10000, lequel dérive lui-même du signe étrusque, et que les signes romains pour 500, pour 5000 et pour 50000 sont chacun la moitié du signe du nombre double. Le signe pour 500000 reste seul sans analogie.

Quant à l'emploi abréviatif du trait horizontal au dessus ou du point à droite des lettres exprimant des unités d'un ordre supérieur à celles qui suivent, Budée, Hostus 5), et après eux MM. Nesselmann et Cantor, ont raison de dire que cet usage était établi dès l'époque de Pline l'ancien. Ces savants ont également raison de dire que chez Pline les unités les plus petites de la portion de nombre exprimée par ces lettres ainsi séparées vers la gauche ne sont pas toujours des milliers, mais quelquefois des centaines: en réalité, chez Pline, ce sont *presque toujours des centaines*, et j'en dirai là cause. Les mêmes savants ajoutent que chez Pline, lorsqu'il y a trois tranches de lettres séparées par deux points, les unités les plus petites du nombre exprimé par la tranche de l'extrême gauche ne sont pas toujours des millions. C'est trop peu dire; car je ne crois pas qu'il y ait chez Pline un seul exemple où ce soient des millions, et j'expliquerai pourquoi. Mais surtout ces mêmes savants ont tort de dire que chez Pline ces expressions sont toujours amphibologiques, de sorte que le contexte seul peut en déterminer le sens. Je vais prouver qu'au contraire, lorsqu'il y a deux ou plusieurs tranches de lettres et que la tranche à droite, n'étant pas surmontée d'un trait horizontal, exprime un nombre dont les unités sont simples, il n'y a jamais amphibologie.

Le principe suivant s'accorde avec tous les textes de Pline, et explique d'une manière sûre tous les cas où à gauche il y a des lettres numérales surmontées d'un trait horizontal ou suivies d'un point, et où à droite il y a d'autres lettres numérales employées avec leur valeur simple:

Si, de deux tranches contiguës de lettres numérales romaines, la tranche à droite a des centaines, l'unité de la tranche à gauche vaut mille fois l'unité de la tranche à droite; mais, si la tranche à droite n'a que des dizaines ou des unités simples, l'unité de la tranche à gauche ne vaut jamais que cent fois l'unité de la tranche à droite.

Ce principe s'applique, soit qu'il n'y ait que deux tranches, soit qu'il y ait trois tranches séparées par des points. Si donc il y a trois tranches et que la tranche à droite n'ait pas de centaines, l'unité de la tranche du milieu est la centaine, et si la tranche du milieu a des centaines de centaines, l'unité de la tranche de gauche est la centaine de mille. Pour que cette unité fût le million, il faudrait que la tranche du milieu et la tranche de droite eussent toutes deux des centaines; mais ce cas est sans exemple dans Pline. Appliquons notre principe aux exemples qu'il fournit.

5) M. Cantor recommande, comme peu connu et digne de l'être davantage, l'ouvrage de Matthæus Hostus, helléniste et numismate allemand du XVIe siècle, *De numeratione emendata veteribus Latinis et Græcis usitata*, Matthaeo Hosto auctore (Anvers, 1582, in-8, 62 pages).

Commençons par les cas les plus fréquents, ceux où il n'y a que deux tranches de lettres numérales. Les exemples en sont extrêmement nombreux dans la partie géographique de l'*Histoire naturelle* de Pline, depuis les deux derniers chapitres du II[e] livre jusqu'à la fin du VI[e]. Quand le nombre à exprimer est au dessous de 10000, Pline ne met pas de centaines dans la tranche à droite. Ainsi, étant donné par exemple, le nombre 2425, Pline 6) l'écrit $\overline{XXIV}$.XXV, et non $\overline{II}$.CCCCXXV. Alors, comme on le voit, l'unité de la tranche à gauche est la centaine et non le millier. Il peut arriver que les centaines manquent dans le nombre à exprimer; mais le millier n'en est pas moins exprimé par X, et non par I, dans la tranche à gauche, de sorte que le principe n'en est pas moins observé. Par exemple, étant donné le nombre 3040, Pline 7) l'écrit $\overline{XXX}$.XL, et non III·XL, ce que signifierait 340 seulement. L'unité itinéraire employée par Pline dans la géographie est en quelque façon le pas, du moins pour les petites distances où il tient compte de 500 pas ou d'un demi-mille. Mais, pour les distances plus grandes, l'unité réelle est le *mille* exprimé par la lettre M, ou par les lettres M.p., ou par diverses autres abréviations des mots *millia passuum*. Or, les distances dont Pline s'occupe dans la géographie sont presque toutes au dessous de 10000 milles. C'est pourquoi, dans ces cinq livres, la tranche à droite n'a que très rarement des centaines, et par conséquent l'unité de la tranche à gauche est presque toujours la centaine et non le millier.

Prenons au hasard quelques exemples entre une multitude d'autres, qui tous recevraient invariablement une explication semblable. Dans le II[e] livre 8), l'expression $\overline{LXXXV}$.LXVIII M. *pass.* signifie 8568 milles, et non 85068 milles. Dans le III[e] livre 9), l'expression $\overline{XXX}$.LIX *passuum* signifie 3059 pas, et non 30059. Dans le IV[e] livre 10), l'expression $\overline{XXIII}$.LX *mil.* signifie 2360 milles, et non 23060. Dans le V[e] livre 11), l'expression $\overline{X}$.XXXVIII M. signifie 1038 milles, et non 10038. Dans le VI[e] livre 12), l'expression $\overline{XXXIV}$.XL M. p. signifie 3440 milles, et non 34040.

Mais, dans les cas rares où Pline a eu à exprimer des nombres de milles itinéraires au dessus de 10000, il a mis des centaines dans la tranche à droite, et alors l'unité de la tranche à gauche a été nécessairement le millier. Ainsi, dans le VI[e] livre 13), l'expression $\overline{XXIX}$.CCCXC signifie 29390 et ne peut évidemment pas signifier autre chose. De même, dans ce même livre 14), l'expression $\overline{XII}$.CLM. p. signifie 12150 milles.

Pour les petites distances itinéraires, où il veut tenir compte d'un demi-mille, le plus souvent Pline se contente d'ajouter à la suite du nombre de milles un D signifiant 500 pas : ainsi, dans le III[e] livre 15), l'expression XII M D *pass.* signifie 12500 pas, c'est-à-dire 12 milles 1/2. Mais quelquefois aussi la lettre M est alors remplacée par le trait horizontal au dessus des lettres qui expriment le nombre de milliers de pas : ainsi dans le VI[e] livre 16), l'expression $\overline{LXXXVII}$ D *pass.* signifie 87500 pas, c'est-à-dire 87 milles 1/2.

En dehors de la géographie et des mesures itinéraires, le principe formulé ci-dessus est fidèlement observé par Pline. Ainsi, dans le XXXIII[e] livre 17), l'expression *auri pondo* $\overline{XVII}$.CCCCX signifie 17410 livres pesant d'or; mais l'expression *argenti* $\overline{XXII}$.LXX signifie seulement 2270 livres d'argent, parce que dans la tranche à droite du second nombre il n'y a pas de centaines.

De même, Cicéron, dans une *lettre* à Atticus (I, 7), dit qu'il doit payer HS $\overline{XX}$.CD, et dans la lettre suivante (I, 8), en mentionnant le paiement de la même somme, il l'exprime ainsi: HS CCIƆƆ CCIƆƆ CCCC, c'est-à-dire 20400 sesterces. La tranche à gauche de la première expression, $\overline{XX}$ signifie 20000, parce que dans la tranche à droite il y a des centaines.

Deux tranches de lettres numérales, avec des centaines dans la tranche à droite, servent toujours à Pline pour exprimer des nombres compris entre 10000 et 100000. Au dessus de 100000, Pline établit trois tranches de lettres numérales. Alors, s'il y avait des centaines dans les deux tranches à droite, l'unité

---

6) Pline, IV, 2, t. 1, p. 307, éd. Sillig (Leipzig, 1851 et suiv., in-8). — 7) V, 5, t. 1, p. 348. — 8) II, 108, p. 202 et 203. Voyez d'autres exemples aux mêmes pages. — 9) III, 5, t. I, p. 225. — 10) IV, 12, t. I, p. 307. Voyez d'autres exemples à la même page, et IV, 12, p. 308; IV, 16, p. 310; IV, 23, p. 326. — 11) V, 2, p. 340. Voyez d'autres exemples, V, 6, p. 348 et p. 349, et V, 8, p. 351. — 12) VI, 33, p. 474. Voyez d'autres, VI, 24, p. 441; VI, 26, p. 447; VI, 33, p. 475. — 13) VI, 17, p. 125. — 14) VI, 20, p. 429. — 15) III, 5, p. 237. — 16) IV, 12, p. 312. — 17) XXXIII, 3, t. 5, p. 84.

de la tranche à gauche serait le million. Mais, dans les rares exemples que son ouvrage présente pour ces grands nombres, la tranche à droite ayant des centaines, mais la tranche du milieu n'en ayant pas, l'unité de la tranche à gauche n'est que la centaine de mille. Par exemple, dans le XXXIIIe livre 18), l'expression *in numerato* $\overline{\text{LXI}}$·XXXV·CCCC signifie 6135400 milliers de sesterces, *sestertiûm (millia)*, en monnaie, c'est-à-dire 613540000 sesterces, et non 61035400 milliers de sesterces; et de même l'expression *auri* $\overline{\text{XVI}}$ XX·DCCCXXXI signifie 1620831 livres d'or, et non 16020831 livres.

Ainsi dans toutes ces expressions numérales de Pline, avec trois tranches de lettres comme avec deux, il n'y a aucune amphibologie. Mais, si une tranche unique, ou bien la tranche à droite, est surmontée du trait horizontal, et si, par conséquent, il n'y a pas à droite une tranche de lettres numérales gardant leur valeur simple, alors le principe posé ci-dessus ne peut pas trouver son application, et c'est alors seulement que l'amphibologie se présente. Le grammairien Probus veut qu'alors, en général, le trait horizontal au dessus des lettres numérales indique des milliers; mais nous allons prouver que quelquefois chez Pline ce sont des centaines.

Voyons d'abord quelques exemples où ce sont bien réellement des milliers. Dans un passage de Lampridius 19), les mots CXX *equitum* signifient 120000 cavaliers Perses, et le signe $\overline{\text{X}}$ dans le même passage signifie 10000. De même, dans le XXXIIIe livre de Pline 20), avec deux tranches, mais dont celle de droite porte le trait horizontal, l'expression $\overline{\text{VII}}$·$\overline{\text{LXXXVIII}}$ *hominum* signifie les 788000 hommes de l'armée de Darius. De même, avec une seule tranche, dans le XXXVIe livre de Pline 21), les expressions $\overline{\text{LXXX}}$ *hominum* et $\overline{\text{XXXX}}$ signifient 80000 et 40000 hommes. De même, dans le livre II de Pline 22), l'expression *stadiorum* $\overline{\text{XXVI}}$ signifie 26000 stades, et l'expression $\overline{\text{CCLII}}$ *stadiorum* signifie 252000 stades, De même, dans le livre XXXIIIe 23), l'expression *p.* $\overline{\text{IX}}$ signifie à 9000 pas; l'expression $\overline{\text{CXX}}$ *assium* signifie 120000 as, les mots *pondo* $\overline{\text{XXIV}}$ signifient 2400 livres pesant; les mots $\overline{\text{D}}$ *talentorum* signifient 500000 talents, et les mots: *laterum aureorum* $\overline{\text{XV}}$, *argentorum* $\overline{\text{XXX}}$ *et* HS $\overline{\text{CCC}}$ signifient 15000 lingots d'or, 30000 lingots d'argent et 300000 milliers de sesterces, c'est-à-dire 300 millions de sesterces 24).

Mais, d'un autre côté, dans le VIe livre de Pline 25), l'expression $\overline{\text{XII}}$ M· *p.* signifie 1200 milles et non 12000 milles; l'expression $\overline{\text{XVM}}$ *passuum* signifie 1500 milles et non 15000 milles; l'expression $\overline{\text{XXVM}}$· *p.* signifie 2500 milles et non 25000 milles. Les exemples semblables sont nombreux dans le VIe livre, et c'est le sens qui empêche l'amphibologie, parceque des évaluations décuples seraient évidemment trop erronées.

Après cette rectification longue, mais utile et nécessaire, je m'empresse d'approuver une remarque très juste de M. Cantor. Cette division des lettres numérales romaines en tranches séparées par des points ou distinguées par des traits horizontaux tracés au dessus d'elles, était un acheminement vers l'attribution d'une valeur de position à chaque groupe de lettres exprimant un nombre au dessus de X.

M. Cantor a raison de signaler la même tendance dans la valeur de position des signaux par le feu, décrits dans un passage des extraits qui nous restent des *Cestes* de Julius Africanus, passage doctement expliqué par M. Vincent.

Ensuite M. Cantor dit quelques mots sur un système de notation tachygraphique, d'après lequel tout nombre peut être rendu par un seul signe compliqué. Le plus ancien auteur qu'Hostus et Heilbronner citent comme ayant fait mention de ce système est Bruchhurst de Nimègue (Noviomagus), mathématicien du XVIe siècle, qui l'attribuait à *certains astronomes*. MM. Henisch et Piccard donnent à ce même

---

18) XXXIII, 3, t. 5, p. 81. — 19) *Vie d'Alexandre Sevère*. — 20) XXXIII, 10, t. 5, p. 114. — 21) XXXVI, 15, t. 5, p. 342. — 22) II, 108 et 109, t. 1, p. 205 et 206. — 23) XXXIII, 2, t. 5, p. 75; XXXIII, 3, p. 79, p. 82, p. 83 et p. 84. — 24) Le signe abréviatif HS, pour IIS (*duo semis*, 2 1/2 as), exprime naturellement le *sestertius*, dont le nom lui-même *(semistertius)* signifie 2 1/2 (as). Mais ici évidemment le signe HS est mis pour exprimer *sestertiûm (millia)*, c'est-à-dire *milliers de sesterces*. Si les lettres numérales devaient se traduire par l'adverbe *trecenties (centena millia)*, la somme serait encore 100 fois plus forte. — 25) VI, 24 et 26, t. 1, p. 441 et 446.

système le nom de *signes chaldéens*. M. Cantor suppose qu'il peut s'agir d'astrologues chaldéens du temps de l'empire romain. Je doute que ces signes remontent si haut.

Quant à la conjecture de Vossius, qui veut que nos neuf chiffres soient empruntés à la tachygraphie de Tiron, affranchi de Cicéron, M. Cantor se contente de renvoyer à la réfutation que Kopp a donnée de cette hypothèse insoutenable.

XII. Mathématiciens romains. [1]

Dans le chapitre précédent, M. Cantor n'a pas cité un seul mathématicien romain, et il a dû aller chercher la numération romaine chez des grammairiens et des compilateurs. Il en donne deux raisons, dont une peut suffire: c'est qu'il ne nous reste aucun ouvrage de mathématiciens romains antérieurs à la chute de l'empire d'occident.

Les Romains n'aimèrent jamais les mathématiques pures. Leurs *mathématiciens* furent des astrologues, condamnés par les lois, mais protégés par la superstition. Leurs *géomètres* furent des arpenteurs amis des procédés faciles et approximatifs, et ne tenant ni aux démonstrations ni à l'exactitude. Avant notre ère, le célèbre Varron, ami de Cicéron, s'occupa de mathématiques comme de toutes choses; mais, quoi qu'on en ait dit, son traité d'arithmétique est perdu. L'architecte Vitruve, qui écrivait quelques années avant notre ère, laisse entrevoir qu'il avait des connaissances géométriques. Sextus Julius Frontinus, inspecteur des aqueducs de Rome sous Vespasien, avait écrit aussi sur l'arpentage, et M. Cantor a peut-être raison d'approuver la conjecture de M. Chasles, d'après laquelle un fragment géométrique anonyme et inédit appartiendrait à cet auteur. Mais, si M. Cantor avait lu plus attentivement la dissertation que M. Lachmann a mise dans le tome second de son édition des *Gromatici veteres*, il n'aurait sans doute pas persisté à nier, comme il l'a fait, l'authenticité de tous les fragments de Frontinus contenus dans cette collection.

Apulée avait traduit ou paraphrasé en latin l'*Arithmétique* grecque du néopythagoricien Nicomaque de Gérase. M. Cantor accepte trop facilement une conjecture d'après laquelle Apulée aurait introduit dans cet ouvrage spéculatif de nombreux exemples de calculs. Cette conjecture me paraît bien peu vraisemblable, et elle est trop peu appuyée par une phrase de l'extravagant Guillaume Postel, qui ne connaissait probablement l'*Arithmétique* d'Apulée que comme nous la connaissons nous-mêmes, c'est-à-dire par une phrase du traité de Cassiodore *sur les mathématiques* [2]: dans un abrégé anonyme de ce traité (Paris, 1540), Postel reproduit infidèlement la phrase de Cassiodore, en y ajoutant des traits de son invention, et en conseillant la lecture du livre d'Apulée, comme s'il existait encore [3].

Sur Andron de Catane, M. Cantor aurait dû effacer de son chapitre XII (p. 172-173) une erreur qu'il a réfutée lui-même (Note 352, p. 399). Andron, maître de Zénodore, c'est-à-dire du premier auteur, dit-on, qui ait écrit sur les isopérimètres, n'est pas Andron de Catane, maître de Marc-Aurèle, mais Andron d'Ephèse, contemporain de Platon.

M. Cantor ne parle des *Gromatici veteres*, que pour dire que ces arpenteurs experts n'étaient pas mathématiciens. Au lieu de raconter la longue histoire du manuscrit de Wolfenbüttel (p. 173-175), pour n'en tirer ensuite aucune donnée, il aurait mieux fait de dire que le *groma*, d'où ces écrivains tiraient leur nom, était un instrument destiné à prendre des alignements à angle droit, les angles droits étant les seuls angles dont la mesure fût nécessaire aux arpenteurs romains comme aux arpenteurs grecs [4].

---

1) *Römische Mathematiker*, p. 166-180. — 2) Fol. 306 recto (Paris, 1588, in-4). — 3) Voyez G. J. Vossius, *De universae matheseos natura et constitutione*, p. 39-40 (Amsterdam, 1660, in-4). — 4) Voyez M. Biot, *Note relative aux instruments et aux procédés des gromatici veteres (Journal des savants*, avril 1849), et mon *Mémoire sur Héron*, IIe partie, ch. 2, p. 94-95, et ch. 4, § 3, p. 171, et Ve partie, p. 283-284 *(Acad. des inscr., Mém. de divers savants*, 1 série, t. 4, Paris, 1854, in-4).

M. Cantor indique ensuite le contenu de l'ouvrage mythologique didactique de Martianus Capella sur les sept arts libéraux, en neuf livres, dont les sept derniers embrassent le *trivium* et le *quadrivium*, c'est-à-dire d'une part la grammaire, la dialectique et la rhétorique, d'autre part la géométrie, l'arithmétique, l'astronomie et la musique. M. Cantor remarque que l'emploi de termes grecs de géométrie, inconnus aux *Gromatici* et rares chez Boèce, est fréquent dans la partie vraiment géométrique du VIe livre, dans lequel, après des énumérations géographiques, on trouve 5) des définitions géométriques empruntées surtout à Euclide. Quant à l'arithmétique théorique de Martianus Capella (livre VII), elle est tirée surtout du néopythagoricien Nicomaque 6).

Après avoir mentionné Cassiodore à cause de quelques données historiques contenues dans la partie mathématique de son petit manuel des sept arts libéraux, M. Cantor donne une notice détaillée sur la vie de Boèce, auteur dont la *Géométrie* renferme deux passages d'une importance capitale pour l'histoire de la notation numérale 7). Avec M. Hand, il incline à nier que Boèce ait étudié à Athènes. Mais il constate l'instruction grecque de Boèce, qui pour les mathématiques en particulier, avait puisé ses connaissances surtout dans les ouvrages d'Euclide et du néopythagoricien Nicomaque, et dans les écrits attribués à l'ancien pythagoricien Archytas de Tarente. M. Cantor ne dissimule pas qu'il incline en faveur de l'authenticité de ces écrits, considérés par lui comme des sections diverses d'un grand ouvrage qui portait le nom d'Archytas 8). Il ajoute que cet ouvrage, plein de doctrines pythagoriciennes, a été étudié par Boèce. J'ajouterai, à mon tour, que considérant cet ouvrage et ses sections comme certainement apocryphes, je pense que Boèce a pu y puiser des doctrines étrangères à l'*ancien* pythagorisme.

XIII. Œuvres de Boèce. 1)

Après avoir écarté les ouvrages chrétiens faussement attribués à notre auteur, et après avoir rendu un juste hommage à son beau traité *Sur les consolations de la philosophie*, M. Cantor a eu l'heureuse pensée de comparer avec les ouvrages didactiques qui nous restent de Boèce la liste de ceux auxquels Théodoric fait allusion dans une lettre où il le loue de ses travaux destinés à communiquer aux Latins les sciences grecques 2). On reconnaît dans les éditions des œuvres de Boèce, la *Logique d'après Aristote*,

5) VI, 706-724, p. 568-577 de Kopp. — 6) M. Cantor veut, sans motifs suffisants, que l'astronomie de Martianus Capella soit aussi néopythagoricienne. Il dit que Martianus Capella s'accorde avec les pythagoriciens Philolaüs, Héraclide, Ecphantus et Hicétas, pour ne pas faire de la terre le centre commun des révolutions planétaires. C'est vrai en ce qui concerne Philolaüs et Hicétas, pour qui la terre et le soleil étaient deux planètes exécutant comme les autres une révolution suivant un cercle autour d'un *feu central du monde* toujours invisible pour nous. Mais il en est autrement d'Ecphantus et d'Héraclide de Pont (nommé à tort Heraclite par M. Cantor): ces deux pythagoriciens faisaient de la terre le centre de la révolution annuelle du soleil, et des révolutions propres de la lune et des planètes; mais ils attribuaient à la terre une révolution diurne au centre du monde. Du reste, Philolaüs et Hicétas étaient aussi éloignés qu'Ecphantus et Héraclide de l'hypothèse de Martianus Capella, qui faisait de Mercure et de Vénus des satellites du soleil considéré comme une planète tournant autour de la terre: hypothèse que Copernic a heureusement dépassé, et à laquelle Tycho-Brahé a voulu revenir. — 7) Contre la tradition qui fait de Boèce un chrétien, et en faveur de l'attribution des ouvrages théologiques portant son nom à un autre Boèce postérieur, M. Cantor se range (avec raison, je crois) à l'opinion de Hand (Art. *Boece* dans l'Encyclopédie d'Ersch et Gruber). Cette opinion a été soutenue aussi en France récemment par M. Jourdain. Cependant M. Bæhr (*Geschichte der rœmischen Literatur*, t. 2, p. 487-488, 3 éd., 1845) est revenu à l'opinion vulgaire, défendue aussi par Baur, *De Boëthio christianæ theologiæ assertore* (Darmstadt, 1841, in-8. — 8) Ces écrits existaient et passaient pour œuvres d'Archytas au 1 siècle de notre ère et dans les siècles suivants. M. Cantor est bien tenté de les déclarer authentiques. Cependant, en présence des conclusions contraires (et, je crois, bien fondées) de M. Gruppe, de M. A. Bœckh et de son neveu M. L. Bœckh, il hésite à se prononcer, et il se borne à conclure, avec le dernier, que dès le commencement de notre ère il existait, sous le nom d'Archytas de Tarante, un ouvrage grec en trois livres, et qu'à cet ouvrage unique appartiennent tous les fragments qui nous restent sur le nom d'Archytas. Il faut excepter les Ἀρχύτου καθολικοὶ λόγοι δέκα, ouvrage apocryphe d'une époque postérieure, publié par Camerarius (Leipzig, 1564) et par Orelli (*Opuscula veterum Græcorum sententiosa et moralia*, t. 2, p. 273-280). — 1) *Die Werke des Boethius*, p. 181-198. — 2) Cassiodori *Variarum Epist.* l. 45, fol. 19 recto (Paris, 1588, in-4).

l'arithmétique d'après Nicomaque, la *musique d'après Pythagore* et la *géométrie d'après Euclide;* mais on y chercherait envain l'*Astronomie d'après Ptolémée*, et la *Méchanique d'après Archimède*. Ce sont là deux ouvrages perdus de Boèce.

Pour l'*Astronomie* de Boèce, M. Cantor a remarqué un témoignage qui prouve qu'elle existait encore au Xe siècle, puisqu'en 982 Gerbert écrivait à Adalbéron qu'il avait trouvé à Mantoue *huit volumes de Boèce sur l'astronomie*, d'autres très distingués *sur les figures de géométrie*, et d'autres encore, non moins admirables. M. Cantor me paraît avoir raison de comprendre que les volumes sur les figures de géométrie et sur d'autres objets étaient de Boèce, comme les volumes sur l'astronomie. Mais certainement il a tort de prétendre qu'il n'y avait que huit volumes en tout, tandisque le texte de Gerbert 3) indique clairement huit volumes pour l'*Astronomie* seule, qui devait être ainsi un ouvrage considérable, c'est-à-dire sans doute un résumé étendu des XIII livres de la *Grande Composition mathématique* de Ptolémée.

Dans les œuvres mêmes de Boèce, au commencement de l'*Arithmétique* 4), M. Cantor signale un passage où on lit que, suivant les anciens Pythagoriciens, le *quadrivium* seul conduit au sommet de la philosophie. C'est ce même *quadrivium* que Théodoric appelle *quadrifarias mathesis ianuas*, en félicitant Boèce d'y être entré. Boèce lui-même, au commencement de son *Arithmétique* et dans son traité de la *Musique* 5), déclare que ce *quadrivium* se compose de l'arithmétique, qui considère les nombres en eux-mêmes, de la musique, qui considère les rapports des nombres, de la géométrie, qui a pour objet la grandeur immobile, et de l'astronomie, qui a pour objet la grandeur mobile.

J'ajoute ici une remarque qui paraît avoir échappé à M. Cantor: c'est que, d'après cette définition, l'astronomie devrait comprendre la mécanique générale, comme appendice de la théorie des mouvements célestes, théorie qui elle-même, suivant Boèce 6), devait avoir pour introduction la théorie géométrique de la sphère, non comprise dans sa *Géométrie* plane. En effet, dans l'énumération que Théodoric donne des œuvres mathématiques de Boèce, la *Mécanique d'après Archimède* vient à la suite de l'*Astronomie d'après Ptolémée*.

Quoi qu'il en soit, professant une égale estime pour toutes les parties du *quadrivium*, Boèce 7) dit qu'il faut suivre jusqu'au bout ce quadruple chemin, ou bien renoncer à la philosophie. Il montre que l'arithmétique vient naturellement la première, et il conclut son premier chapitre de l'*Arithmétique* en disant: *Quare, quoniam prior, ut claruit arithmeticæ vis est, hinc disputationis sumamus exordium.* D'où M. Cantor conclut que Boèce, en écrivant ces lignes, avait l'intention de traiter aussi les trois autres parties, sans excepter l'astronomie, et j'ajouterai qu'à l'astronomie il rattachait la mécanique.

Cependant je dois faire encore une remarque qui a échappé à M. Cantor: c'est que tout le premier chapitre de l'*Arithmétique* de Boèce est tiré des cinq premiers chapitres de l'*Arithmétique* de Nicomaque, et que, sauf le mot *quadrivium*, les deux passages de Boèce sur lesquels M. Cantor s'appuie, sont la traduction libre de deux passages de l'auteur grec 8). Il serait donc possible à la rigueur que Boèce eût traduit cette phrase, sans avoir pour son propre compte les intentions qu'elle paraît supposer, ou bien qu'ayant eu ces intentions il ne les eût pas accomplies jusqu'au bout. La lettre de Théodoric et celle de Gerbert prouvent plus sûrement que Boèce avait écrit des traités non-seulement sur l'arithmétique et la musique, mais encore sur la géométrie, sur l'astronomie et même sur la mécanique.

Pour prévenir une objection, M. Cantor remarque que, d'après l'ordre des quatre ouvrages, Boèce n'a dû se référer dans chacun d'eux qu'à ceux qui avaient dû précéder, et qu'ainsi le silence de deux premiers ouvrages sur les deux derniers ne prouve rien contre l'authenticité de la *Géométrie*, que nous avons, ni contre l'existence de l'*Astronomie*, aujourd'hui perdue.

---

3) Dans Duchesne, *Hist. Franc. Script.*, t. 2, p. 790 (Paris, 1636, in-fol.). — 4) I, 1, p. 1296 (Bâle, 1570, in-fol.). — 5) *Arithmétique*, I, 1, p. 1296; *Musique*, II, 3, p. 1395. — 6) P. 1297: *Sphæricam vero atque astronomiam.* — 7) *Arithm.* I, 1, p. 1298. — 8) Voyez Boèce, *Arithm.*, I, 1, p. 1296 et 1298, et comparez Nicomaque, *Arithm.*, I, 3, p. 69-70, et I, 5, p. 73 (éd. Ast).

Pour la *Géométrie* de Boèce, M. Cantor cite, comme je l'avais fait 9), le témoignage de Cassiodore 10), qui, d'accord avec la lettre de Théodoric, dit que Boèce avait traduit en latin ce qu'Euclide avait écrit en grec. M. Cantor ajoute que Cassiodore considère l'*Arithmétique* de Boèce comme une traduction de celle de Nicomaque, tandisqu'elle en est tantôt un résumé, tantôt une paraphrase libre, et qu'ainsi ce qu'il appelle une traduction de l'ouvrage d'Euclide peut être une rédaction latine très différente de l'original grec.

Ensuite M. Cantor reproduit, en les complétant d'une manière très heureuse, les preuves par lesquelles j'avais établi que les deux livres de la *Géométrie* imprimée sous le nom de Boèce sont bien l'ouvrage qu'il avait écrit sur cette science. Je vais exposer brièvement la longue série de ces preuves, en les complétant encore par des remarques nouvelles.

L'accord de nombreux manuscrits, dont quelques uns sont très anciens, prouve que, si l'attribution de ces deux livres à Boèce, auteur des traités sur l'*Arithmétique* et la *Musique*, est erronée, cette erreur était généralement acceptée dès le Xe siècle et dans les siècles suivants.

D'après ce que nous savons des autres ouvrages mathématiques de Boèce, et d'après l'état de ce genre de connaissances chez les Romains, sa *Géométrie* devait être inférieure en intérêt à son *Arithmétique*: elle devait offrir, comme nous l'avons vu, un extrait des *Eléments* d'Euclide; mais elle devait y ajouter ce que les Romains estimaient le plus en fait de géométrie, c'est-à-dire des notions pratiques d'arpentage. Or c'est là précisément ce qu'on trouve dans les deux livres imprimés.

Ici je m'arrête, pour apporter à ces réflexions de M. Cantor un complément qui peut sembler un paradoxe, mais que je vais démontrer: l'auteur des deux livres imprimés, auteur qui, suivant moi, est bien Boèce, n'a pas eu sous les yeux le texte même des *Éléments* d'Euclide, qu'il a cru traduire, mais un maigre extrait grec de cet ouvrage.

Dans mes *Recherches sur les origines de notre système de numération écrite* (p. 8), je n'ai pas dit ce que M. Cantor (p. 189) me prête, savoir, que Boèce a considéré la géométrie théorique, traitée si maigrement dans son premier livre, comme une partie de la géométrie pratique, traitée dans le second. Au lieu de cette erreur, qu'il n'aurait pas fallu m'imputer, j'avais énoncé une proposition vraie, que je vais compléter en la justifiant. Boèce 11) distinguait nettement la géométrie théorique de la géométrie pratique. Mais j'ai dit et je répète qu'il n'a donné de la première que ce qui était strictement nécessaire pour l'arpentage. En effet, 1° il n'a donné que la théorie des lignes et des surfaces, à l'exclusion de celle des solides; 2°, comme M. Cantor lui-même l'avoue, mais tardivement et incidemment, dans le chapitre suivant (p. 201), tout ce qu'on trouve, dans toute la partie principale du premier livre de Boèce, sur cette théorie des lignes et des surfaces, ce sont, d'abord des *figures* accompagnées de *définitions* (p. 1487-1495), qui forment, avec les axiômes (p. 1492), ce que l'auteur (p. 1495) appelle les *Prolégomènes*; puis, sous le titre de *Schemata* (p. 1495-1514), des figures accompagnées seulement de l'énoncé des théorèmes et des problèmes auxquels elles se rapportent, mais *sans démonstrations*.

Est-ce de propos délibéré que l'auteur latin n'a rien donné des démonstrations d'Euclide? Je n'avais pas posé cette question dans la dissertation citée; mais je vais la résoudre ici. D'après ce que Boèce, dès le début de sa *Géométrie* (p. 1487, l. 1-2), dit contre *l'obscurité des explications d'Euclide sur les figures de géométrie*, surtout d'après ce qu'il dit plus loin (p. 1514, l. 4 et suiv.) sur *l'obscurité et la brièveté extrême d'Euclide dans ces explications*, d'après la manière dont il se vante de *l'exactitude qu'il a mise à la traduire mot pour mot*, enfin d'après la manière dont il s'exprime sur la nécessité qu'il a vue d'ajouter *de son propre fonds*, comme supplément à la fin de cette traduction fidèle, les démonstrations 12) des solutions des trois premiers problèmes 13); il est de toute évidence que Boèce n'avait pas le texte

9) *Recherches nouvelles sur les origines de notre système de numération écrite*, p. 7-8 du tirage à part. — 10) *Géom.*, fol. 300 verso (Paris, 1856, in-4). — 11) *Géom.*, II, p. 1520. — 12) Il les donne, p. 1514-1518. — 13) Voyez ces problèmes, p. 1495.

même des *Éléments* d'Euclide, mais seulement un extrait grec, rédigé sans doute pour l'usage des arpenteurs grecs, et ne contenant que des figures et des énoncés sans démonstrations. En effet, comme je l'ai montré dans mes *Recherches sur Héron d'Alexandrie* 14), les écrivains grecs sur la géométrie pratique séparaient la *stéréométrie* de la *géométrie plane;* dans cette dernière, ils commençaient par donner à part toutes les définitions et les axiômes, puis ils venaient aux problèmes, dont ils donnaient les solutions sans les démontrer. Ils réunissaient quelquefois ces derniers sous le titre Σχήματα τῆς γεωμετρίας 15), *figures de géométrie*, titre que Boèce a reproduit en grec *(Schemata)* en tête de la partie principale de son premier livre (p. 1495), et qu'en deux autres endroits (p. 1487 et 1514) il a traduit en latin *(De figuris geometriæ)*. C'est donc bien là une traduction latine d'un extrait grec des quatre premiers livres des *Éléments* d'Euclide, extrait pris par le traducteur pour l'œuvre même d'Euclide.

Après cette traduction, qui remplit presque tout le premier livre de Boèce, et après les démonstrations ajoutées par Boèce pour les trois premiers problèmes seulement, la fin du premier livre (p. 1516-1519) et tout le second (p. 1520-1536) sont tirés des arpenteurs romains, et surtout de l'écrivain *latin* Archytas. Cependant les deux livres sont intitulés, l'un *premier*, l'autre *second livre de la géométrie d'Euclide traduite par Boèce:* cela convient bien à l'ouvrage de Boèce que Théodoric et Cassiodore disent *traduit du grec d'Euclide*. En tête du premier livre, l'auteur dit qu'il va éclairer l'ouvrage obscur d'Euclide *sur les figures de l'art géométrique:* cela convient parfaitement à l'ouvrage de Boèce, que Gerbert avait trouvé à Mantoue et qui traitait, disait-il, *des figures de géométrie*. M. Cantor a raison de remarquer l'identité et la bizarrerie de ces expressions, dont je viens d'expliquer l'origine grecque et la signification.

En tête du premier livre de la *Géométrie* (p. 1487), on lit: *Mi patrici*. A qui s'adressent ces mots? En cet endroit, le mot *patricius* n'est pas un nom propre, mais un titre honorifique. Pourquoi le nom propre manque-t-il? C'est que l'ouvrage, étant bien réellement de Boèce, fait suite aux traités de l'*Arithmétique* et de la *Musique;* Boèce n'a pas besoin de répéter ici le nom du patrice, parcequ'il l'a nommé en tête de l'*Arithmétique* (p. 1293), première partie du *quadrivium*, dont la dédicace est: *ad patricium Symmachum*. C'est son beau-père le patrice Symmaque 16), auquel, en effet dans la préface de cette *Arithmétique* (p. 1295) et dans le chapitre premier (p. 1296-1298), il semble annoncer la *Musique*, la *Géométrie* et l'*Astronomie*, traités par lesquels il doit compléter le *quadrivium*. Dans le corps même de l'*Arithmétique*, les trois autres ouvrages ne sont pas cités, parcequ'elle les précède. La *Musique*, qui vient la seconde, se réfère très fréquemment à l'*Arithmétique*, dont elle est une continuation. Dans la *Géométrie*, M. Cantor signale un renvoi à la *Musique* 17) et trois renvois à l'*Arithmétique* 18), dont le dernier est une citation presque textuelle 19).+

archita preso per guida da Boezio —

Quel est l'Archytas pris pour guide par l'auteur dans la fin du premier livre (depuis p. 1516, l. 8) et dans tout le second livre de la *Géométrie*? Est-ce Archytas de Tarente, le vieux pythagoricien, auquel Boèce, dans sa *Musique* 20), oppose les critiques de Ptolémée contre quelques points de ses théories musicales, et dont le même Boèce, dans son *Commentaire* sur les *Catégories* (p. 114), comme dans son *Arithmétique* (II, 41, p. 1352), cite un ouvrage philosophique, mais non sans en suspecter l'authenticité, à l'exemple de Thémistius? Non, répond avec raison M. Friedlein 21); mais l'unique preuve qu'il donne

---

14) P. 104 et suiv., p. 120, et p. 176 et suiv. — 15) Voyez mes *Recherches sur Héron*, p. 130. — 16) Le profond respect avec lequel Boèce s'adresse au patrice Symmaque, dans sa Préface générale, mise en tête de son *Arithmetique*, prouve bien que c'est à son beau-père qu'il dédie ses ouvrages mathématiques. Son beau-père est bien le Symmaque auquel il dit: PATERNA *gratia nostrum provehas munus*. Il faut donc rejeter la conjecture de M. Cantor, d'après laquelle il s'agirait du beau-frère de Boèce, Symmaque le fils, aussi patrice. Il est vrai que dans un manuscrit du Vatican cité par Heilbronner *(Hist. Mathes. univ.*, p. 341*)*, le titre de la *Géométrie* est: *Boëtii liber ex Euclide ad Patricium filium*. Mais le copiste de ce manuscrit n'a songé ni à *Symmaque le fils*, ni à *Symmaque le père*. Ayant lu dans la première ligne de la *Géométrie* ces mots: *Mi patrici*, l'ignorant copiste a conclu que Boèce avait un fils nommé *Patricius*. — 17) *Géom.*, p. 1518, l. 3-5 d'en haut. — 18) P. 1514, l. 10-12 d'en haut, p. 1518, l. 3-5 d'en haut, et l. 4-3 d'en bas. — 19) Comparez *Arithm.* I, 7, p. 1299, l. 7-2 d'en bas et II, *8*, p. 1320, l. 20-21 d'en haut. — 20) IV, 16-17, p. 1479-1480. — 21) *Gerbert, die Geometrie des Boëthius und die indischen Ziffern*, p. 16 (Erlangen, 1861, in-8).

de la distinction des deux Archytas, est contestée avec non moins de raison par M. Cantor; car il n'est pas vrai que Boèce n'ait pas pu prendre pour guide en matière d'arpentage un auteur qu'il aurait contredit sur une question de musique. A en croire M. Cantor (p. 191), j'aurais *soupçonné* la distinction des deux Archytas, mais *la preuve ne m'aurait pas mieux réussi qu'à M. Friedlein*. Au lieu de *soupçonner* la distinction des deux Archytas, je l'ai *affirmée*, et j'en ai donné une *preuve décisive* 22) que M. Cantor a répétée après moi: évidemment Archytas, que dans sa *Géométrie* Boèce (p. 1516) appelle un *écrivain LATIN non méprisable*, n'a pas pu être confondu par Boèce avec le vieux philosophe *grec* Archytas. Mais, quoique cette preuve suffise, il faut savoir gré à M. Cantor de l'avoir confirmée, en remarquant que deux des cinq passages de la *Géométrie* de Boèce où Archytas est cité, indiquent expressément qu'il est postérieur à Euclide 23).

M. Cantor reconnait la vraisemblance de mon opinion d'après laquelle cet écrivain *latin* Archytas, qui n'est cité que dans la partie de la *Géométrie* de Boèce relative à l'arpentage, serait un de ces arpenteurs latins que Boèce (II, p. 1520) promet de suivre dans cette partie.

Une conjecture ingénieuse de M. Cantor aurait besoin d'être confirmée par l'étude du célèbre manuscrit mathématique de Chartres. L'ouvrage latin anonyme que M. Chasles y a trouvé et qui offre tant de rapports avec le second livre de la *Géométrie* de Boèce, ne serait-il pas l'ouvrage même de l'Archytas latin, mis à profit par Boèce?

Quoi qu'il en soit, le titre d'*écrivain latin*, donné par Boèce à cet Archytas, ne permet de le confondre ni avec le vieil Archytas de Tarente ni avec le pseudonyme grec dont il nous reste des fragments, et M. Cantor remarque avec justesse qu'en désignant ainsi l'arpenteur Archytas dans le premier endroit où il en a parlé, Boèce a eu l'intention de le distinguer de l'Archytas grec, dont il avait parlé dans ses ouvrages précédents.

M. Cantor remarque, après M. Chasles, que le pentagone en étoile, dont la figure se trouve et est expliquée dans un passage obscur de la fin du premier livre de la *Géométrie* de Boèce 24), était une figure chère aux pythagoriciens, que Boèce aime à prendre pour guides 25). Cette figure ne se trouve pas dans les *Éléments* d'Euclide; mais on l'avait peut-être ajoutée dans l'extrait que Boèce a traduit. Elle se trouve précisément à la fin de sa traduction de cet extrait qu'il a pris pour l'œuvre même d'Euclide.

Nicomaque, source principale de l'*Arithmétique* de Boèce, est cité aussi dans le second livre de sa *Géométrie* 26), et, suivant ma remarque répétée par M. Cantor, il est cité précisément pour une expression grecque (ἑτερομήκης) que Boèce avait déjà citée de lui dans son *Arithmétique* 27).

Ainsi bien des motifs, réunis par M. Cantor, doivent nous faire reconnaitre dans les deux livres de la *Géométrie* l'œuvre authentique de Boèce. Cependant, en faveur de cette authenticité si importante à établir, j'avais indiqué encore d'autres preuves, que M. Cantor aurait bien fait de ne pas négliger, et

---

22) *Rech. sur les origines de notre syst. de num. écr.* p. 8, l. 12-15. — 23) *Géom.*, II, p. 1523, l. 17-22, et p. 1526, l. 6-10. — 24) P. 1511, l. 1-3. Comparez M. Chasles, *Geschichte der Geometrie*, p. 548 et suiv. de la trad. allem. de M. Sohncke. La figure et l'explication, données par les éditions et par les meilleurs manuscrits, manquent pourtant dans celui d'Erlangen, qui est un des meilleurs. A ce propos, M. Cantor présente des remarques fort justes contre cette erreur de critique qui consiste à s'autoriser des omissions d'un copiste, pour accuser d'interpolation les manuscrits plus complets. M. Cantor pense que ce passage a été omis dans le manuscrit d'Erlangen, à cause de son obscurité. — 25) M. Cantor, qui ne s'interdit pas les épisodes, donne une notice sur un manuscrit de Berne, écrit en l'an 1004, et dans lequel on trouve la figure d'un *hexagone en étoile*. De la description insuffisante que M. Cantor donne de ce manuscrit, comparée avec la petite notice de M. Blume (*Gromatici veteres*, t. 2, p. 84) sur ce même manuscrit, il résulte qu'un extrait des deux livres de la *Géométrie* de Boèce (p. 1487-1530, éd. de Bâle) y est suivi d'un extrait de la compilation qui suit aussi dans les éditions (p. 1530-1546 de Bâle), qu'on y trouve notamment le petit résumé par demandes et réponses (p. 1541-1542), et que le tout est divisé en cinq livres attribués à Boèce. Telle est sans doute aussi la *Géométrie de Boèce en cinq livres*, qui se trouve dans un manuscrit de la Bibliothèque Laurentienne de Florence suivant M. Libri (*Hist. des sciences en Italie*, t. 1, p. 89). — 26) P. 1536, l. 12, où il faut lire *heteromeces*. — 27) II, 26, p. 1341, l. 13 d'en bas.

dont M. Wœpcke 28) me paraît aussi ne pas avoir tenu assez de compte. Ce savant accepte les preuves que j'avais données de l'authenticité de la partie principale du premier livre de la *Géométrie* de Boèce ; mais il croit que la fin de ce livre, depuis la ligne 4 de la page 1516, forme, avec tout le second livre, une seconde partie, qui peut-être regardée comme l'œuvre d'un continuateur, assez ancien pourtant. Je vais faire voir ici que cette supposition est inadmissible.

Dès 1837, j'avais montré 29) que cette seconde partie se lie naturellement à la première, qu'elle la complète et qu'elle forme un tout avec elle. J'avais prouvé 30) que l'auteur de la seconde partie se donne expressément comme l'auteur de la première 31) et comme l'auteur des traités précédents sur l'*Arithmétique* et sur la *Musique* 32), de sorte que, s'il n'était pas Boèce, au lieu d'être un simple continuateur, il serait un faussaire audacieux. J'ajoute qu'il se désigne sans affectation, incidemment et d'une manière qui n'est pas celle d'un faussaire.

M. Wœpcke avoue que la seconde partie, apocryphe suivant lui, se réfère à la première partie authentique; mais il dit que je n'ai pas prouvé que réciproquement la première partie du premier livre, reconnue authentique par M. Wœpcke lui-même, un passage (p. 1514, l. 5-12) qui précède les trois démonstrations ajoutées par Boèce, mais qui annonce évidemment quelque chose de plus. Qu'on fasse surtout attention à ces mots: *Sunt enim a nobis quædam huic operi INSERENDA, HUIC ARTI valde necessaria, et supra dictis respondentia et SUBSEQUENTIBUS CONVENIENTIA. Subsequentibus convenientia!* Quelque chose devait donc *suivre* les trois démonstrations ajoutées. Cette *suite*, annoncée ainsi par Boèce dans la partie reconnue authentique par M. Wœpcke, commence précisément avec ce qui serait suivant lui une continuation apocryphe (p. 1516, l. 4 et suiv.). Il y a donc dans la première partie un texte de Boèce qui suppose nécessairement la seconde. Ce passage de la première partie est d'ailleurs rappelé vers la fin de la seconde partie en des termes presque identiques: *Quia igitur de omnium HUIC ARTI INSERENDARUM speculationum rationibus breviter enodateque sat disseruimus*, etc. (p. 1535, l. 5-4 d'en bas). La second partie est donc bien certainement du même auteur que la première, dont M. Wœpcke reconnaît l'authenticité.

En concluant pour l'authenticité des deux livres de la *Géométrie* de Boèce, M. Cantor (p. 196-197) rejette, comme moi, l'authenticité de la compilation qui les suit sous le titre: *Boëtii liber de Geometria*. Cette compilation, donnée dans l'édition de Venise comme *troisième livre de la Géométrie de Boèce*, manque dans les meilleurs manuscrits de cet ouvrage et est anonyme dans quelques autres. C'est un appendice ajouté par les copistes.

M. Cantor (p. 197-198) excuse la longueur de ce chapitre par l'importance des documents que les deux livres de la *Géométrie* de Boèce, reconnus authentiques, vont lui fournir pour l'histoire de notre système de numération écrite. Telle sera aussi l'excuse de cette longue analyse, qui ajoute beaucoup aux résultats des recherches de M. Cantor sur cet ouvrage, et qui répond aux objections de M. Wœpcke.

---

28) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 16-17 (Paris, 1863, in-8). Comparez mes *Rech. sur l'origine de notre système de numération écrite*, p. 6-8. — 29 *Orig. de notre syst. de numération écrite*, p. 4 et 6. — 30) Dans la même dissertation, p. 8. — 31) *Géom.*, I, p. 1516, l. 4-7, et II, p. 1520, l. 4 et 29. — 32) I, p. 1518, l. 4 d'en haut, et l. 4 d'en bas

XIV. Le Manuscrit E. Multiplication. 1)

Sous ce titre trop peu clair, M. Cantor donne dans ce chapitre l'explication du commencement du passage du premier livre de la *Géométrie* de Boèce concernant l'*abacus*. Cette explication avait été déjà parfaitement développée par M. Chasles à l'aide du *manuscrit de Chartres*, que M. Cantor nomme par abréviation *manuscrit C*. M. Cantor rejeunit cette explication, en la rattachant à une étude spéciale du *manuscrit d'Erlangen* (autrefois *manuscrit d'Altdorf*), qu'il nomme *manuscrit E*. Il reconte comment l'emploi de neuf chiffres analogues aux nôtres avait été signalé dans ce manuscrit par deux dissertations de Weidler, en 1727 et en 1755, et par Mannert en 1801. D'après l'examen qu'il a fait de ce manuscrit avec M. le professeur Wattenbach, M. Cantor pense, comme Mannert, que l'écriture est du XI[e] siècle, au lieu du VIII[e] ou du IX[e], indiqués par Weidler. Il conclut que ce manuscrit est contemporain de celui de Chartres, avec lequel il s'accorde presque mot pour mot pour le texte des deux livres de la *Géométrie* de Boèce et en particulier du passage sur l'*abacus*.

M. Cantor donne, d'après le manuscrit d'Erlangen, ce passage complet en latin dans les notes de son livre 2). La traduction allemande qu'il en donne dans le texte de son chapitre XIV s'arrête au milieu de l'explication de la multiplication sur l'*abacus*, parceque, dit-il, le surplus n'est qu'un développement peu utile de ce qui précède. Quant à la partie concernant la division, M. Cantor la réserve pour le chapitre suivant. Sa traduction de la description de l'abacus et de la multiplication n'est pas exempte de fautes graves 3); mais elle est fidèle sur les points essentiels pour le but de l'ouvrage. L'explication de l'abacus et de son usage est donnée ensuite par M. Cantor avec beaucoup de clarté. La figure de l'abacus, telle qu'il l'a donnée dans ses planches (figure 39) d'après le manuscrit d'Erlangen, est conforme, sauf quelques différences, qui seront expliquées, à celle que M. Chasles a publiée d'après le manuscrit de Chartres. M. Canter démontre, après M. Chasles, que le texte de Boèce sur l'*abacus de Pythagore* se rapporte à cette figure, donnée ici par la plupart des manuscrits et notamment par les plus anciens et les meilleurs. Cette figure est laissée en blanc dans l'édition de Venise; elle est remplacée par la *table de multiplication* dans l'édition de Bâle et dans quelques manuscrits peu anciens. M. Cantor conclut que cette substitution erronée est l'unique cause pour laquelle les modernes ont donné à la *table de multiplication* le nom de *table de Pythagore*, tandisque ce nom n'a été attribué à la table de multiplication par aucun auteur ancien. Par exemple, il ne l'a été ni par le pythagoricien Nicomaque, ni par Boèce, qui tous deux ont donné cette table dans leur *Arithmétique* 4), où elle était à sa véritable place, tandisqu'elle est étrangère au passage sur l'*abacus*.

---

1) *Die Handschrift E. Multiplication*. p. 199-211. — 2) Note 404, p. 406-408. — 3) Le titre latin est mal traduit (p. 201); car les mots *De ratione abaci*, au lieu de signifier *Sur les rapport de l'abacus (Ueber das Verhältniss des abacus)*, signifient *Sur la méthode de l'abacus*. Quelques lignes plus loin, pour prouver l'utilité de l'arithmétique, Boèce demande: *Si l'on ignorait la nature des nombres, comment pourrait-on reconnaître les figures célestes du firmament formées par des groupes d'étoiles?* Ce qui veut dire: comment pourrait-on compter les étoiles des constellations figurées, telles que le Bélier, le Taureau, etc? *Quis ipsius firmamenti siderea corpora stellis compacta, naturæ numerorum inscius, deprehendat?* M. Cantor traduit (p. 202): *Quel homme, sans connaître la nature des nombres, pourrait découvrir comment les corps planétaires du firmament se pelotonnent en étoiles? Wer wird unbekannt mit der Natur der Zahlen entdecken, wie die planetarischen Kørper des Firmamentes sich zu sternen Zusammenballen?* Jamais *sidereus* n'a signifié *planétaire*, et jamais Boèce n'a songé à découvrir, par l'arithmétique ou autrement, comment des corps planétaires se pelotonnent en étoiles! C'est pire qu'un contresens; c'est un non-sens. — 4) Voyez Nicomaque, *Arithm.*, I, 9. p. 96-99 (Ast), et Boèce, *Arithm.*, I, 26, p. 1313-1314.

Mais cet abacus, décrit par Boèce, diffère de ceux dont M. Cantor a parlé dans les chapitres IX et X, car, dans l'*abacus* de Boèce, les boules, fiches ou jetons, dont chacun représentait une unité, sont remplacées par les *apices*, dont chacun représente un nombre. Dans les deux éditions, le passage sur les *apices* est rendu obscur par l'omission d'une ligne, qui se trouve dans les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, et avec laquelle le sens est très intelligible. Les *apices* étaient des pièces mobiles sur chacune desquelles était marqué un des nombres de 1 à 9, et ce nombre exprimait des unités simples, des dizaines, des centaines, etc., suivant la colonne où l'apice était placé. Etant données la colonne de l'apice multiplicande et la colonne de l'apice multiplicateur, Boèce indique quelle doit être la colonne du produit. Les neuf nombres étaient figurés sur les apices soit par les neuf chiffres dont la figure est donnée ici dans les manuscrits, soit par les neuf premières lettres de l'alphabet prises suivant leur ordre, soit, dit Boèce dans le texte complet des manuscrits, par *le nombre naturel* lui-même, c'est-à-dire, comme l'explique M. Cantor, par autant de traits qu'il y avait d'unités dans le nombre à exprimer 5). Les figures des neuf chiffres sont données d'une manière à peu près identique, tant sur la figure de l'abacus que dans le texte, par le manuscrit de Chartres et par celui d'Erlangen, et dans le texte seulement par deux manuscrits de Paris. Ces mêmes chiffres se rencontrent dans le texte de beaucoup d'autres manuscrits. L'édition de Venise en donne, dans le texte, une imitation typographique très inexacte et pourtant à peu reconnaissable. L'édition de Bâle y substitue, dans le texte, nos neuf chiffres modernes.

M. Cantor dit, avec raison, que par l'introduction des *apices* dans les calculs à faire sur l'abacus, le procédé était rendu plus intelligent qu'il ne l'était avec les fiches ou les jetons, dont l'addition se faisait machinalement, et que la nécessité d'un calcul réel dans chaque colonne était un acheminement vers la vulgarisation des procédés arithmétiques. Il ajoute à cette remarque vraie une conclusion contestable, compliquée d'une hypothèse fort douteuse. Il veut que l'emploi des *apices* et des neuf chiffres ait été connu des plus anciens pythagoriciens, mais qu'ensuite il ait été oublié peu à peu, à cause de la répulsion du vulgaire pour ces signes étranges et inconnus, et à cause de la forme nouvelle des opérations intellectuelles que cet emploi demandait. Il n'est nullement prouvé, et il me paraît peu probable, que l'usage des apices, et surtout celui des neuf chiffres, remontent jusqu'aux premiers temps de l'école pythagoricienne, et qu'ensuite cet usage soit tombé en oubli pendant l'époque florissante de mathématiques chez les Grecs.

M. Cantor a employé, dans sa traduction, les expressions claires *unités simples* et *dizaines* au lieu des expressions *digiti* et *articuli*, c'est-à-dire *doigts* et *phalanges*, employées dans le texte de Boèce. Ces expressions sont définies par Boèce dans une espèce de préface mise en tête de ce passage. Suivant une explication signalée par M. Chasles dans un manuscrit du XII[e] siècle et répétée au XVI[e] siècle par Noviomagus, ces expressions sont motivées par une méthode antique d'exprimer les unités et les dizaines avec les doigts étendus ou repliés. Cette méthode, à la quelle il est fait allusion dans un passage de Plutarque interprété par M. Bœckh 6), se trouve décrite non-seulement par Bède, mais dans des textes latins plus anciens, recueillis par Forcellini au mot *Digitus* de son Dictionnaire latin 7), et auxquels M. Cantor ajoute un texte d'une lettre de Théodoric à Boèce 8). La même méthode s'est conservée au moins jusqu'au XVI[e] siècle 9).

Mais comment se fait-il que les expressions *digiti* et *articuli*, et les expressions grecques équivalentes ne se trouvent, dans le sens d'*unités* et *dizaines*, chez aucun auteur antérieur à Boèce? Je suis bien tenté de répondre que ce sens de ces mots pouvait n'être pas beaucoup plus ancien, bien que l'usage d'expri-

---

5) M. Chasles croit que les mots *naturali numero* signifient *les caractères employés dès avant cette invention pour exprimer les nombres naturels.* — 6) Programme d'été de l'Université de Berlin, 1841, p. XI, note 13. —7) Voyez des textes plus nombreux, cités par Oudendorp dans ses notes sur Apulée, *Apol.*, t. 2, p. 579 des Œuvres. — 8) Cassiodori *Variar. epist.* I, 10, fol. 6 recto (Paris, 1588, in-4) — 9) M. Chasles dit avoir trouvé dans des écrits du XII[e] siècle et du XIII[e] d'autres explications de l'origine des expressions *digiti* et *articuli;* mais il ne les cite pas. Je pense, avec M. Cantor, que celle-ci est la vraie.

mer les nombres par le doigts fût très antérieur. M. Cantor, qui admet, sans preuves, l'antiquité de ces expressions appliquées aux nombres, répond que les écrivains grecs sur l'art du calcul sont perdus, qu'en latin Boèce est le plus ancien qui nous reste, et qu'il y en avait eu peu avant lui, les seuls qu'on puisse citer étant l'écrivain latin nommé Archytas, et Apulée, s'il faut en croire un manuscrit latin cité par M. Halliwell, mais dont les indications, écrites en un style barbare, sont très erronées en ce qui concerne les auteurs grecs sur le calcul. Mais il me semble que les auteurs qui, avant l'époque de Boèce, ont parlé du calcul par les doigts, par exemple Pline 10) et Apulée 11), auraient eu là une occasion assez naturelle de mentionner le sens arithmétique des mots *digiti* et *articuli*, s'il avait été usité de leur temps.

XV. Le Manuscrit E, Division, Fractions. 1)

Ce chapitre, qui est la continuation du précédent, se compose de trois parties, dont la première, concernant les règles de la division sur l'*abacus*, contient d'abord la traduction littérale de la suite du même passage de Boèce d'après le manuscrit d'Erlangen, puis un commentaire bien nécessaire sur ce texte, dont la concision va jusqu'à l'obscurité et jusqu'à l'insuffisance. M. Cantor explique par des exemples la méthode que Boèce avait formulée trop peu clairement et sans exemples.

Toutes les fois que le diviseur ne contient que des unités d'un seul ordre, unités simples, ou dizaines, ou centaines, le procédé de Boèce est celui de notre division ordinaire, si ce n'est que l'emploi du zéro est remplacé par la différence de position des chiffres dans les colonnes de l'*abacus*.

Mais, quand le diviseur renferme des unités de deux ordres, le procédé de Boèce diffère essentiellement du nôtre: il consiste à ajouter toujours au diviseur le nombre strictement nécessaire pour que, devenant multiple de 10, il n'ait plus d'unités simples. Par exemple, s'agit-il de diviser 672 par 16? Pour avoir le diviseur 20, on ajoute à 16 la *différence* 4. On place le 2 de 20 sous le 6 de 672; la division de 600 par 20, ou de 60 par 2, donne *premier quotient partiel* 3 dizaines, c'est-à-dire 30, et le *reste* est 72. On multiplie la *différence* 4 par le *quotient* 30; on ajoute le produit 120 au *reste* 72, et l'on a le *premier reste total* 192. Le 1 de 192 n'étant pas divisible par 2, on place le 2 de 20 sous le 9, et la division de 190 par 20, ou de 19 par 2, donne pour *second quotient partiel* 9 unités simples et le reste 12. On multiplie la différence 4 par le quotient 9; on ajoute le produit 36 au reste 12, et l'on a le *second reste total* 48. Le 2 de 20 se place sous le 4 de 48; la division donne le *troisième quotient partiel* 2, et le reste est 8. On multiplie la différence 4 par le quotient 2; on ajoute le produit 8 au reste 8, et l'on a le *troisième reste total* 16, qui, divisé par 16, donne le *quatrième quotient partiel* 1, sans reste. L'addition des quatre quotients partiels 30, 9, 2 et 1 donne le *quotient total* 42.

Ce procédé de Boèce est nommé par M. Cantor *division à l'aide de compléments* ou *différences*: il le compare avec la *division à l'aide des compléments décadaires*, méthode proposée et vantée par M. Crelle comme plus élégante et plus commode que notre division ordinaire 2). Il est vrai que la méthode de Boèce et celle de M. Crelle ont toutes deux sur la nôtre l'avantage d'éviter l'essai d'un quotient partiel trop fort ou trop faible. Mais le procédé de Boèce, qui passe par quatre divisions partielles pour arriver au quotient 42 de la division de 672 par 16, et surtout le procédé de M. Crelle, qui demande 21 divisions partielles pour arriver à ce même quotient, me paraissent bien moins expéditifs et moins commodes que notre division ordinaire, à la quelle, n'en déplaise à MM. Crelle et Cantor, il faut conserver notre pré-

---

10) *H. N.* XXXIV, 7, t. 5, p. 140 (éd. Sillig). Comparez II, 23, t. 1, p. 131. — 11) *Apologie*, Œuvres, t. 2, p. 579 (éd. Oudendorp, in-4). — 1) *Die Handschrift E. Division, Minutien*. P. 212-230. — 2) Le procédé de M. Crelle diffère de celui de Boèce, en ce que, par exemple, au lieu de transformer le diviseur 16 en 20 par la *différence* 4, on le transforme en l'unité d'ordre décadaire supérieur, c'est-à-dire en 100, par le *complément décadaire* 84, sur lequel on opère comme sur la *différence* 4. Mais le nombre des divisions, des multiplications et des additions est bien plus grand et plus fastidieux que dans la méthode de Boèce.

férence, malgré ce qu'il y a d'ingénieux dans les deux autres procédés 3). Mais, s'il fallait choisir entre ces deux derniers, celui de Boèce me paraîtrait mériter la préférence pour les cas où le diviseur n'a que deux ordres d'unités.

La suite du passage de Boèce concerne la division par un nombre qui a des centaines et des unités, sans avoir des dizaines. M. Cantor explique bien ce texte, que M. Friedlein n'avait pas tout-à-fait compris, faute de savoir le sens du mot *différence* chez Boèce. Soit, par exemple, 800 à diviser par 206. On ôte une centaine du dividende et les unités simples du diviseur : 700 divisé par 200 donne le *quotient* 3, avec 100 pour *premier reste*. On multiplie par le quotient 3 les 6 unités négligées dans le diviseur, et on a le produit 18, qui retranché de la centaine négligée d'abord dans le dividende, donne le *second* reste 82, *complément décadaire* de 18. Le reste total de la division est donc 182.

Remarquons comment Boèce indique la manière de *soustraire* 18 de 100: il dit que, pour avoir les unités simples du *reste*, il faut prendre la *différence entière*, c'est-à-dire 2, puisque 10—8=2; mais que, pour trouver les dizaines, il faut prendre la *différence diminuée d'une unité*, c'est-à-dire 8, tandisque la différence entière serait 10—1=9. Le fait est vrai et l'opération est juste; mais l'explication du procédé de la soustraction est bien peu claire, surtout n'étant pas donné, comme ici, sur un exemple numérique: Boèce ne donne aucun exemple.

Là s'arrête le passage sur l'abacus, tel que Boèce l'a tiré de l'écrivain latin Archytas, et là se termine aussi la première partie (p. 212-218) du chapitre XV de M. Cantor. Il aurait pu remarquer que tout cela est insuffisant pour enseigner à diviser un nombre entier quelconque par un autre nombre entier quelconque, par exemple lorsque le diviseur aurait des unités simples, des dizaines et des centaines avec ou sans des unités d'ordres supérieurs.

Ensuite vient, dans le manuscrit d'Erlangen comme dans les éditions, le second livre de la *Géométrie* de Boèce, contenant des formules d'arpentage dignes du très médiocre savoir des arpenteurs romains, et parmi lesquels il n'y a d'un peu meilleur, que ce que Boèce a emprunté à l'écrivain latin Archytas, probablement grec d'origine comme de nom.

C'est encore à ce même Archytas que Boèce a emprunté le seul passage important pour nous de son second livre, c'est-à-dire son dernier chapitre 4), concernant le calcul des divisions et subdivisions de l'unité *(minutiæ)*, avec le tableau qui accompagne ce chapitre, le tout occupant cinq feuillets entiers du manuscrit d'Erlangen. M. Cantor donne en latin, dans sa note 426 (p. 410-412), la première édition complète de ce chapitre de Boèce; il le traduit en allemand dans son texte (p. 218-220), et il reproduit le tableau dans la figure 42 de ses planches. Il remarque l'accord du manuscrit d'Erlangen et du manuscrit de Chartres avec le texte imprimé pour le tableau et pour le chapitre, jusqu'à l'endroit où celui-ci s'arrête dans les éditions, qui en remplacent la fin par une compilation évidemment apocryphe.

---

3) Un fait, signalé par M. Cantor, avait échappé aux historiens des mathématiques. C'est que, tandisqu'on ne trouve plus au XVIe siècle la *division à l'aide des différences*, c'était à la multiplication qu'on appliquait alors un procédé analogue et d'une complication plus inutile: on y avait recours, quand la somme des deux facteurs surpassait 10. Par exemple, pour multiplier 6 par 8, on posait 10—6=4, et 10—8=2. Le produit des *différences* 4 et 2 donnait 8 unités simples pour premier produit partiel. Ensuite, en retranchant du premier facteur 6 la second différence 2, ou bien du second facteur 8, la première différence 4, on obtenait 4 dizaines pour seconde partie du produit. Les 4 dizaines, ajoutées aux 8 unités simples, donnaient 48 pour le produit total. Au XVIe siècle, Pierre Laramée (Ramus) avait bien raison de se moquer des écrivains qui enseignaient en 7 règles ce procédé inutilement long et compliqué, dont on est d'ailleurs si facilement dispensé par l'étude de la table *de multiplication*. Laramée citait, comme le plus ancien écrivain sur la multiplication à l'aide des différences, l'auteur anonyme de l'*Algoritmus demonstratus*, c'est-à-dire probablement l'astronome du XVe siècle Régiomontanus. M. Cantor, qui n'a pu se procurer cet ouvrage, pose la question de savoir si, là ou ailleurs, la division à l'aide des différences et la multiplication à l'aide des différences ont été employées en même temps, ou bien si le procédé pour la multiplication n'a été introduit qu'après la désuétude du procédé analogue pour la division. — 4) P. 1363, l. 5 d'en bas - p. 1538, l. 4 d'en bas.

Dans le commencement, depuis longtemps imprimé, Boèce attribue aux anciens, et surtout aux Pythagoriciens, l'emploi de signes spéciaux, les uns grecs, les autres barbares, pour les subdivisions usuelles de l'unité de longueur. Suivant une conjecture de M. Cantor, que nous réfuterons tout à l'heure, ces signes, que Boèce ne donne pas, seraient ceux dont Bède s'est servi, et que Gerbert a employés, comme connus depuis longtemps, sans avoir besoin de les expliquer : ceux de Bède et de Gerbert sont semblables à ceux que M. Cantor a retrouvés dans un manuscrit de Berne, et M. Halliwell dans un manuscrit anglais 5). Boèce remplace les signes de l'once et des onze fractions de l'once, qu'il énumère, par les douze premières lettres de l'alphabet latin A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, dans le tableau qu'il donne et qui est une sorte d'*abacus*. La fin du chapitre, c'est-à-dire la partie qui suit le tableau dans les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, partie que M. Cantor publie pour la première fois, explique l'usage des *apices* et de leur valeur de position dans ce tableau, et spécialement l'usage d'une partie de ce tableau ajoutée par Boèce. M. Cantor aurait bien fait d'énoncer expressément une remarque qu'il sous-entend sans doute, savoir, que cette fin du passage, ayant pour objet la multiplication des nombres complexes et fractionnaires, est une partie essentielle du chapitre sur les subdivisions de l'unité, et que les copistes des manuscrits suivis dans les deux éditions avaient évidemment mutilé ce chapitre, en retranchant cette fin pour y substituer, comme œuvre de Boèce, une compilation de morceaux divers des arpenteurs latins.

M. Cantor avoue qu'il ne comprend pas bien quelques passages de ce chapitre de Boèce, et surtout ce qui concerne la partie ajoutée par l'auteur à ce tableau d'Archytas. Il me paraît, en effet, bien difficile de deviner le sens des explications trop insuffisantes de Boèce.

Ici se termine la seconde partie (p. 218-224) du chapitre XV de M. Cantor. La troisième partie (p. 224-230) renferme des considérations qui se rapportent au chapitre XIV aussi bien qu'au chapitre XV, et qui ont pour objet la réfutation des objections contre l'authenticité soit de la *Géométrie* de Boèce tout entière, soit surtout des deux passages discutés dans ces deux chapitres.

Mais je quitte M. Cantor, pour répondre d'abord à une objection qu'il n'a pas connue. Dans le chapitre XIII, j'ai prouvé, contre M. Wœpcke, que la fin du premier livre de cette *Géométrie* et tout le second sont de la même main que la partie principale du premier livre, reconnue authentique par M. Wœpcke lui-même. J'avais dit, en 1857, que le passage de la fin du premier livre sur la méthode de l'abacus se trouve dans *tous* les manuscrits. Je ne savais pas que M. Halliwell 6) avait cité deux manuscrits d'Angleterre où ce passage manque, et qu'il avait considéré ce passage important comme une interpolation. Je vais répondre à cette objection que M. Wœpcke 7) me signale. Nous avons vu que la figure du pentagone en étoile 8) manque dans le manuscrit d'Erlangen. Pourquoi? Parceque le copiste n'a pas compris le passage très obscur auquel cette figure se rapporte. Nous venons de voir que la fin du passage sur les fractions manquait dans les manuscrits qui ont servi aux deux éditions. Pourquoi? Parce qu'elle avait paru inintelligible aux copistes. Nous avons vu que la figure de l'*abacus* a été supprimée à la fin du premier livre dans l'édition de Venise, et qu'elle a été remplacée dans certains manuscrits et dans l'édition de Bâle par la *table de multiplication*, tandisque tout le passage demande la figure supprimée et repousse la figure intruse. Pourquoi celle-ci est-elle venue là? Parceque les copistes la comprenaient. Pourquoi l'autre a-t-elle disparu? Parcequ'ils n'y comprenaient rien. De même, pourquoi tout ce passage sur l'abacus, passage qui se trouve dans tous les manuscrits excepté deux, manque-t-il dans ces deux manuscrits? Parceque, ne comprenant pas ce passage, deux copistes ont eu la fantaisie de le supprimer. Depuis quand une lacune de deux manuscrit fait-elle autorité contre le texte plus complet de tous les

5) Il aurait fallu les comparer avec les signes employés pour les fractions dans les éditions et les manuscrits de Vitruve, X, 10-15 (15-21). Voyez aussi les *Gromatici veteres*, t. I, p. 339-340 (éd. Lachmann), et les traités métrologiques de Volusius Mæcianus et de Priscien. Comparez M. Hultsch, *Griechische und römische Metrologie*, II, 20, p. 112-113 (Berlin, 1862, in-8). — 6) *Rara mathematica*, p. 107, 2 éd. (Londres, 1841). — 7) *Propagation des chiffres indiens*, p. 16-17 (Paris, 1863, in-8). — 8) *Géométrie* de Boèce, I, p. 1544 (Bâle). Voyez ci-dessus, chap. XIII, note 24.

autres, surtout des plus anciens et des meilleurs? Je dis qu'il y a certainement lacune dans ces deux manuscrits. Car, dès 1857, j'ai montré 9), et M. Cantor (p. 221) répète avec raison, qu'une annonce de l'*abacus* se trouve (p. 1516, l. 8-10) un peu avant le passage supprimé; que ce passage tient d'ailleurs une place nécessaire dans l'ensemble de l'ouvrage, et que, dans ce passage même, l'auteur se réfère à tout le commencement de sa *Géométrie* et même à ses traités sur l'*Arithmétique* et sur la *Musique*.

M. Wœpcke me signale aussi les objections de M. A. Bœckh, qui, comme M. Lachmann, rejette l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce tout entière. Mais ici nous retrouvons M. Cantor, qui n'a pas laissé ces objections sans réponse. Avant de les aborder, il traite deux questions préparatoires, dans l'étude desquelles nous allons le suivre.

Sans comprendre entièrement le passage du second livre de la *Géométrie* de Boèce sur le calcul des fractions, il est aisé de voir qu'à l'époque du rédacteur ni les neuf signes employés par lui sur les *apices* de l'*abacus*, ni les signes de figure étrange qu'il n'a pas voulu employer pour les fractions, n'étaient entrés dans l'usage général, bien que les uns et les autres eussent été employés par l'écrivain latin Archytas: notre auteur avait adopté les premiers signes, comme peu nombreux et commodes: il aurait craint de trop innover à la fois, en adoptant aussi les derniers, trop difficiles à comprendre. Or, chez Bède, savant moine anglais de la fin du VIIe siècle et du commencement du VIIIe, on trouve des signes bizarres pour les fractions, et, de la manière dont Bède en parle, il résulte que ces signes n'avaient alors rien d'insolite même en Angleterre. Au Xe siècle, Gerbert, dans sa *Géométrie*, les emploie comme généralement connu, et même sans juger utile de les définir. A Berne, dans un manuscrit du Xe siècle, M. Cantor les a retrouvés avec un tableau analogue à l'*abacus*. De ces faits M. Cantor conclut que la *Géométrie*, attribuée à Boèce, écrite à une époque où les signes des fractions n'étaient pas encore vulgarisés, a été écrite longtemps avant la fin du VIIe siècle, et par conséquent vers le VIe siècle, époque de Boèce. Pourquoi ne serait-ce pas par Boèce lui-même?

Ce serait-là une preuve de plus en faveur de l'authenticité de ce passage; mais je dois dire qu'elle ne me paraît pas valable. Elle suppose 1° l'identité des fractions de Boèce avec celles de Bède et de Gerbert, 2° l'identité des signes employés par Bède et par Gerbert avec les signes que Boèce a connus sans les adopter. La seconde de ces suppositions est gratuite, et la première est certainement fausse, comme je m'en suis assuré par une comparaison que M. Cantor aurait dû faire. Les noms des fractions de Boèce, noms destinés à rappresenter surtout des longueurs, mais applicables à des fractions quelconques, sont empruntés les uns à la nomenclature des longueurs grecques, les autres à celle des poids grecs, quelques uns aux expressions grecques du temps, et ils sont en partie des mots grecs, en partie des équivalents latins des mots grecs. Au contraire, les noms des fractions de Bède, à l'exception d'un seul *(scripulum)*, sont tout autres que ceux de Boèce; ils sont tous purement latins, et identiques à ceux que Varron et Volusius Mæcianus 10) employaient, cinq siècles et demi et trois siècles avant Boèce, pour désigner les mêmes fractions. Mais voici, entre les fractions de Boèce et celles de Bède, une autre différence plus décisive que celle des noms. Les onze fractions de Boèce sont des divisions et subdivisions de l'once (οὐγγία), prise pour unité subsidiaire par les pythagoriciens suivant Boèce, ou plutôt par les néopythagoriciens, et considérée par eux comme douzième du *pied* grec (πούς), et comme intermédiaire entre le *palme* (παλαιστής), qui était le sixième du pied, et le *doigt* (δάκτυλος), qui en était le seizième 11). Reduites en fractions directes de l'once, ces divisions et subdivisions, d'après les définitions

9) *Rech. nouv. sur les origines de notre num. écrite*, p. 6. — 10) Voyez Varron, *De ling. lat.*, V, 171-172, et Volusius Mæcianus, *Distributio partium*, éd. Bœcking (Bonn, 1831, in-12). Comparez Balbus, *De asse minutisque eius portiunculis* (à la suite de Volusius, éd. Bœcking). Au contraire, Priscien, qui vivait à Constantinople sous Justinien, donne un système gréco-romain de fractions de l'once, qui se rapproche de celui d'Archytas et de Boèce. Voyez Priscien, *Carmen de ponderibus et mensuris* (*Poët. lat. min.*, éd. Lemaire, t. 4, p. 443-448). Comparez Priscien, *De figures numerorum* (*Grammatici latini*, éd. Putsch, p. 1346 et suiv.) — 11) *Id quod palmo esset minus, digito autem majus, unciam vocare maluerunt* (pythagorici), dit Boèce, *Géom.*, II, p. 1536, l. 7-8. Le texte donné par M. Cantor (p. 410-412), d'après le manuscrit d'Erlangen, est très altéré pour cette phrase.

de Boèce, sont : *digitus* (δάκτυλος) = 3/4 d'once, *stater* (στατήρ) = 1/2, *quadrans* (τέταρτον) = 1/4, *dragma* (δραχμή) = 1/8, *scripulus* (γράμμα) = 1/24, *obolus* (ὀβολός) = 1/48, *ceratis* (κερατίς) = 1/96, *siliqua* (κεράτιον) = 1/144, *punctum* (στιγμή) = 1/192, *minutum* (λεπτόν) = 1/470, *momentum* (ακαρίς) = 1/768. Des 18 fractions de Bède 12), les 12 premières, rapportées à l'*as* prise pour unité, sont; *deunx* = 11/12 d'as, *dextans* = 5/6, *dodrans* = 3/4, *bes* = 2/3, *septunx* = 7/12, *semis* = 1/2, *quincunx* = 5/12, *triens* = 1/3, *quadrans* = 1/4, *sextans* = 1/6, *sescuncia* = 1/8, et *uncia* = 1/12. Les six fractions inférieures, rapportées à l'once, sont: *semuncia* = 1/2 once, *sicilicus* = 1/4, *sextulæ duæ* = 1/3, *sextula* = 1/6, *dimidium sextulæ* = 1/12, *scripulum* = 1/24. Ainsi, des six fractions de Bède au dessous de l'once, trois seulement ont les mêmes valeurs que trois des onze de Boèce, et une seule a en même temps le même nom. Il est vrai que les signes des fractions identiques sont tout autres chez Bède que chez Volusius Mæcianus 13). Mais les signes donnés par Bède ne peuvent pas être identiques à ceux que Boèce avait sous le yeux puisqu'ils ne représentent pas du tout le même système de fractions. Celui de Boèce, avec son caractère grec, vient bien du néopythagoricien grec Archytas écrivant en latin, et non d'une source romaine.

Passons au second point: M. Cantor a parfaitement raison de constater, contre M. Bœckh, que dans le passage de Boèce sur les fractions de l'once, tel qu'il est complété par les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, il est question de l'*abacus* et des *apices* employés avec valeur de position pour le calcul de ces fractions.

Cela posé, M. Cantor aborde les objections de M. A. Bœckh 14), dont l'opinion se résume dans les trois propositions suivantes :

1°. L'ouvrage entier, tel que nous l'avons, serait une compilation, dont une des sources serait peut-être la *Géométrie* perdue de Boèce.

2°. Quant aux deux morceaux sur l'usage de l'abacus et sur le tableau pour le calcul des fractions, la partie principale de chacun d'eux remonterait à des sources grecques et peut-être très anciennes, par l'intermédiaire d'un écrit faussement attribué au pythagoricien Archytas; mais la rédaction de ces deux morceaux serait d'un style détestable.

3°. Les phrases concernant les *apices* et les neuf chiffres ne seraient peut-être pas antérieures au XI° siècle de notre ère.

Persistant à croire à l'authenticité des deux livres de la *Géométrie* de Boèce, mais satisfait de la concession contenue dans la seconde proposition de M. Bœckh en faveur de l'antique origine de l'ensemble des deux passages controversés, M. Cantor porte toutes ses forces contre la troisième proposition, et n'insiste pas assez contre la première, que je vais combattre, en lui opposant des faits qui avaient échappé à M. Cantor.

Comme nous l'avons montré (chapitre XIII), des témoignages irrécusables établissent que Boèce avait écrit une *Géométrie* d'après Euclide. La *Géométrie* en deux livres que tous les manuscrits nous donnent comme œuvre de Boèce, est un extrait des quatre premiers livres des *Eléments* d'Euclide, avec des compléments qui adaptent cet extrait aux besoins pratiques des Romains. Le rédacteur de cette *Géométrie* latine rappelle par les mots *mi patrici* la dédicace *ad patricium Symmachum*, qui mise par Boèce en tête du recueil de ses œuvres mathématiques s'applique expressément à son *Arithmétique*, à sa *Musique*, et à sa *Géométrie*, et devait s'appliquer aussi à son *Astronomie* perdue, puisque Boèce, dans sa Préface et dans le chapitre Ier de son *Arithmétique*, annonce à son beau-père Symmaque l'intention d'embrasser les quatre parties du *quadrivium*. D'un autre côté, le rédacteur du complément ajouté à la suite de l'extrait

---

12) *De ratione unciarum*, Œuvres, t. I, p. 141 (Cologne, 1612, in-fol.). — 13) *Distributio partium* (éd. Bœcking). Voyez aussi un anonyme, dans les *Geomatici veteres*, t. I, p. 339-340 (éd. Lachmann), et Vitruve, X, 10-15 (15-21), t. I, p. 290-302, et la note *De notis mensurarum*, t. I, p. 300-312 (éd. Schneider). Comparez M. Hultsch, Métrologie, p. 112-114. — 14) *Index lectionum quæ auspiciis regis Aug. Fred. Guil. IV in universitate lit. Frid. Guil. per semestre æstivum MDCCCXLI instituentur*, p. X et suiv. Ce passage de M. Bœckh est cité textuellement par M. Cantor, p. 225-226.

d'Euclide pour l'usage des arpenteurs, se donne comme le rédacteur de cet extrait, et par conséquent de la *Géométrie* entière en deux livres, et il se donne en même temps comme l'auteur de l'*Arithmétique* et de la *Musique* qui précèdent. De plus, j'ai établi (chapitre XIII) un fait important qui avait échappé à M. Cantor : Le rédacteur de l'extrait latin d'Euclide sous sa forme actuelle n'avait fait lui-même que traduire un extrait grec comprenant les figures et les énoncés contenus dans les quatre premiers livres des *Éléments* sans les démonstrations, et en faisant cette traduction il avait cru mettre en latin le texte complet du géomètre grec. Ceci renverse entièrement la première proposition de M. Bœckh, qui fait des deux livres de la *Géométrie* attribuée à Boèce une compilation puisée à des sources latines, au nombres desquelles serait la *Géométrie* rédigée par Boèce d'après Euclide.

La seconde proposition de M. Bœckh ne résiste pas davantage aux fait constatés. Archytas, cité par Boèce comme un *écrivain latin non méprisable* sur la géométrie pratique, n'est ni le vieux philosophe *grec* Archytas de Tarante, ni un faussaire *grec* usurpateur de son nom.

Quant au style des deux passages sur l'abacus et sur les fractions, style indigne de Boèce suivant M. A. Bœckh, M. Cantor oppose à ce savant les doutes de son neveu M. L. Bœckh 15) sur cette appréciation littéraire. J'ajoute que le texte de ces deux passages a été très maltraité par les copistes, qui ne les comprenaient pas. D'ailleurs, M. Cantor remarque fort à propos que ces deux passages sont empruntés par Boèce à l'arpenteur Archytas, qui pouvait n'être pas un habile latiniste. Le mot le plus inquiétant pour l'authenticité me paraît être le mot *firmamentum* pour *cœlum* 16). C'est le στερέωμα des septante et des chrétiens grecs ; c'est le *firmamentum* des vieilles traductions latines de la Bible et des chrétiens d'occident. Mais, depuis deux siècles que le christianisme était devenu la religion de l'État en Italie, ce mot avait pu s'introduire dans le langage ordinaire, et par conséquent ce mot peut-être soit de Boèce, soit de l'écrivain latin Archytas, pourvu que cet Archytas ne soit pas antérieur de plusieurs siècles à Boèce, comme M. Cantor (p. 223) le suppose gratuitement et à tort suivant moi.

Arrivant à la troisième proposition de M. Bœckh, M. Cantor prouve d'abord que malgré l'assertion contraire de ce savant, il est question des apices et de leur valeur de position dans le passage sur les fractions 17), et non pas seulement dans le passage sur l'abacus. Il prouve ensuite que les phrases concernant les apices et les neuf chiffres sont des parties essentielles de ces deux passages, au lieu d'y avoir été interpolées, comme M. Bœckh le prétend.

En vain M. Bœckh demande comment il pourrait se faire que Boèce, connaissant les neuf chiffres, ne les eût employés nulle part ailleurs. M. Cantor répond que, jusqu'à l'introduction du zéro, les neuf chiffres ne pouvaient pas servir à exprimer les nombres audessus de 9, ailleurs que dans les colonnes de l'*abacus*. Enfin, M. Cantor prouve, contre M. Bœckh, que la figure de l'*abacus*, nommé *table des géomètres* par Boèce (p. 1516, l. 8), comme par les abacistes du moyen-âge, et le passage par lequel Boèce en explique l'emploi, sont à leur place dans la partie pratique de la *Géométrie* de Boèce. Sur ce point, il répète les explications données par M. Chasles et par moi, et acceptées par M. Friedlein, qui pourtant sur tout le reste suit l'opinion de M. Bœckh. Quant au tableau pour le calcul des fractions, personne avant M. Cantor n'avait expliqué pourquoi, au lieu de se trouver au commencement du second livre, où l'auteur se contente de le promettre (p. 1520, l. 21-23), il est rejeté à la fin de ce livre. De même que le passage sur l'abacus est mis à la fin du premier livre, pour préparer les calculs numériques qui ne viennent que dans le second, de même le tableau des fractions est mis à la fin de ce second livre, où il n'y a que des calculs de nombres entiers, mais pour préparer à l'étude de l'*Astronomie* de Boèce, qui venait à la suite de la *Géométrie*, et qui, rédigée d'après le grand ouvrage de Ptolémée, devait faire, comme lui, un fréquent usage des nombres fractionnaires et complexes. En effet, dans le *Liber abaci*

15) *Ueber den Zusammenhang der Schriften, welche der Pythagoreer Archytas hinterlassen haben soll* (Appendice au Programme d'automne du Lycée de Karlsruhe, 1841). — 16) Voyez ci-dessus, chap. XIV, note 3. — 17) Voyez le texte complet, publié pour la première fois par M. Cantor, note 428, p. 411.

du manuscrit de Berne 18), écrit au Xe siècle, on lit que l'*abacus* a un double usage, comme instrument de la géométrie et comme *introduction à l'astronomie*. J'ajoute une remarque, qui vient confirmer celle de M. Cantor: Boèce lui-même (p. 1535, fin), avant de donner le tableau pour le calcul des fractions, dit que ce tableau, *merveilleux même pour cet art* (c'est-à-dire pour la géométrie pratique), *est absolument nécessaire pour d'autres parties des sciences mathématiques*, c'est-à-dire sans doute surtout pour l'astronomie et la mécanique 19).

Mais pourquoi Boèce n'a-t-il pas mis la méthode de l'abacus et le tableau pour les fractions dans son *Arithmétique*, à la quelle renvoie sa *Géométrie*, et dans laquelle se trouve (I, 26, p. 1314) la table de multiplication? Après avoir remarqué que Boèce n'aime pas à dire longtemps d'avance ce qui ne trouvera son application que beaucoup plus tard, M. Cantor ajoute une autre raison, que j'avais déjà donnée: c'est que *logistique* ou *arithmétique pratique*, à laquelle appartiennent les calculs des nombres entiers et des fractions sur l'abacus, est étrangère à l'*Arithmétique* de Nicomaque reproduite par Boèce, tandisqu'à cette arithmétique spéculative appartiennent la théorie des proportions 20), à laquelle Boèce renvoie dans le premier livre de sa *Géométrie* (p. 1514), et la *table de multiplication* 21), nécessaire pour la théorie de la composition des nombres.

M. Cantor termine ce chapitre, en formulant les deux conclusions auxquelles aboutissent ses chapitres XIV et XV, et que je viens de fortifier par quelques considérations nouvelles: 1°. La *Géométrie* de Boèce en deux livres, telle qu'elle se trouve dans les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, avec les deux passages sur l'abacus et sur les fractions, est bien de cet auteur. 2°. Boèce connaissait les neuf chiffres qui se trouvent dans le texte de ces deux manuscrits, et leur usage avec valeur de position sur l'abacus: il les avait empruntés à un écrivain latin nommé Archytas, à l'exemple duquel il les nommait *signes pythagoriques*. Il s'agit maintenant de savoir en quoi et jusqu'à quel point cette dénomination était fondée.

XVI. Signes Pythagoriques. 1)

Avant d'aborder cette question et pour mieux la résoudre, M. Cantor revient à la figure de l'abacus, telle qu'elle est donnée dans le passage, reconnu authentique et non interpolé, de la *Géométrie* de Boèce. Pour le texte de ce passage, les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, copies faites au XIe siècle sur des manuscrits aujourd'hui perdus, sont d'accord; mais il n'en est pas de même pour la figure, comme le montre la comparaison des descriptions détaillées de M. Chasles 2) avec la planche de M. Cantor (figure 39). Les deux figures ont 12 colonnes, qui de droite à gauche ont en tête l'unité et les puissances croissantes de 10 écrites en chiffres romains, et au dessus, dans les dix premières colonnes à droite, neuf chiffres pour les nombres de 1 à 9, puis un dixième signe. Mais les formes de ces dix signes diffèrent notablement dans les deux figures, quoique ces formes soient presque identiques dans le texte des deux manuscrits, où ces dix signes se trouvent répétés en dehors de l'abacus. Dans le manuscrit d'Erlangen, les colonnes sont closes en haut par de petits arcs de cercle, qui manquent dans la figure du manuscrit de Chartres d'après la description détaillée de M. Chasles. Nous verrons (chapitre XX) que ces *arcs*, dont Boèce ne parle pas, ont été ajoutés, entre le VIe siècle et le Xe. Plus haut encore, dans des prolongements des neuf ou dix premières colonnes, les deux figures donnent dix mots, qui sont les noms des

18) Voyez la note 430 de M. Cantor, p. 412. C'est par erreur qu'il renvoie (p. 229, l. 3) à sa note 425. — 19) *Mirabilem et arti huic, ceterisque mathesios disciplinis necessariam figuram*. Pour l'emploi des fractions et de leurs signes dans la mécanique, voyez Vitruve, *De Architectura*, X, 10-16 (15-21), t. 1, p. 290-302, éd. Schneider (Leipzig, 1807-1808, 3 vol. in-8). Comparez la note *De notis mensurarum*, t. 1, p. 300-312). — 20) *Arithm.* de Boèce II, 46 et suiv. Comparez Nicomaque, *Arithm.*, II, 21 et suiv.— 21) *Arithm.* de Boèce, I, 25, p. 1314. Comparez Nicomaque, *Arithm.* I, 19. — 1) *Pythagorische Zeichen*, p. 231-250. — 2) *Sur le passage de la Geometrie de Boèce* etc. p. 7-8 (Bruxelles, 1836, in-4. Extrait du t. XI des Mém couronnés), et *Aperçu hist. sur le développement des methode en Geometrie*, Note XII, p. 532-533 de la trad. allem. de M. Sohncke, *Gesch. der Geom.* (Halle, 1839, in-8).

neuf chiffres et du dixième signe. Dans les deux figures, les quatre premiers mots, le septième et le huitième de droite à gauche sont: *igin*, *andras*, *ormis*, *arbas*, *senis*, *temenias*. Mais le cinquième et le sixième sont *quinas* et *calctis* dans le manuscrit d'Erlangen, tandisqu'ils sont écrits *quimas* et *caltis* dans le manuscrit de Chartres. Le neuvième et les dixième, *celentis* et *sipos*, sont placés dans les prolongements des colonnes 9 et 10 du premier manuscrit, tandisque le mot *celentis* et au dessus de lui le mot *sipos* sont dans le prolongement de la neuvième colonne du second manuscrit. Maintenant, descendant au dessous des chiffres romains, M. Cantor signale entre les parties inférieures des deux figures une discordance plus grande encore. Dans le manuscrit de Chartres, on trouve, jusqu'au bas de l'*abacus*, six autres rangées de chiffres romains, dont les trois premières expriment la moitié, le quart et le huitième des douze nombres supérieurs en chiffres romains qui forment les titres de colonnes et en marquent l'ordre décimal; les deux rangées suivantes expriment les fractions de l'*once* (douzième de l'unité), et la dernière offre les nombres de 1 à 12 en chiffres romains. Au lieu de ces six rangées horizontales, le manuscrit d'Erlangen n'en présente que trois, dans lesquelles on reconnait une tentative mal réussie pour prendre la moitié, le quart et l'huitième des nombres écrits en chiffres romains dans la rangée au dessus.

Il me parait évident, comme à M. Cantor, qu'après avoir copié fidèlement le texte de Boèce, les copistes des deux manuscrits ont voulu compléter la figure de son *abacus* sur le modèle des *abacus* usités de leur temps, abacus qui embrassaient le calcul des fractions, tandisqu'à la fin de la *Géométrie* de Boèce un tableau spécial est donné pour ce calcul. Mais le copiste du manuscrit d'Erlangen, plus ignorant en mathématiques que celui du manuscrit de Chartres, s'est arrêté après avoir mal rempli la moitié de cette tâche.

La figure de l'abacus ayant été ainsi altérée par les copistes, il faut s'en tenir aux figures des neuf chiffres, telles qu'elles sont données semblablement par le deux manuscrits dans le texte même de ce passage, d'où l'on ne pourrait les retrancher sans mutiler ce texte authentique, qui les suppose. Quant à la dixième figure, qui ne se trouve que sur l'abacus, et à laquelle le texte ne fait aucune allusion, il ne faut pas l' attribuer à Boèce.

M. Cantor veut prouver que ces neuf chiffres de Boèce viennent des *pythagoriciens grecs*, mais que ceux-ci les avaient empruntés eux-mêmes à des peuples étrangers. Sur ces deux points, je vais exposer brièvement les vues de M. Cantor, sauf à les examiner ensuite.

Boèce, dans son traité de la *Musique* (IV, 3, p. 1441-1442), a emprunté aux Pythagoriciens d'anciens signes musicaux tirés des lettres de l'alphabet grec diversement arrangées, et il déclare n'avoir voulu rien y changer. A la fin de sa *Géométrie* (II, p. 1536, l. 12-15), Boèce déclare n'avoir pas voulu adopter, pour les fractions, d'autres signes pythagoriques, dont l'explication lui est inconnue, et qui sont, dit-il, d'origine en partie grecque et en partie étrangère, c'est-à-dire babylonienne d'après une hypothèse de M. Bœckh. Suivant M. Cantor, qui incline vers cette même hypothèse, Boèce expliquait les signes musicaux, parce qu'il pouvait le faire en peu de mots. Ne connaissant pas l'explication des signes pour les fractions, il en faisait l'aveu, et il les remplaçait par d'autres signes tirés de l'alphabet latin. Bien qu'il crût comprendre la signification symbolique des figures des neuf chiffres, il ne l'expliquait pas, parcequ'il la jugeait trop difficile à communiquer aux profanes.

Arrivés à Boèce par l'intermédiaire des Pythagoriciens, les neuf chiffres pouvaient avoir une origine étrangère et plus antique. M. Cantor écarte sans discussion les considérations transcendantes par lesquelles M. de Paravey a prétendu appuyer l'hypothèse de Hager sur l'origine purement chinoise des neuf chiffres. Mais il emprunte à Hager 3) une remarque importante: c'est qu'en passant d'un peuple à un autre, un signe peut changer soit de position, soit de signification 4). En effet, si l'on compare les deux manuscrits du traité de Planude *Sur le calcul indien* qui existent à Venise, on voit que le 7 de l'un est semblable

---

3) *Memorie sulle cifre arabiche (Fundgruben der Orients*, t. 2, p. 65-81, Vienne 1811; et à part, Milan, 1813). — 4) Comme exemple, M. Cantor cite le mot *billion*, qui signifie en français l'unité suivie de 9 zéros à droite, et en allemand l'unité suivie de 12 zéros.

au 8 de l'autre, et que les chiffres pour les nombres 2 et 3 sont debout dans l'un et couchés dans l'autre. De même, les six chiffres pour les nombres 1, 2, 3, 5, 8 et 9, tels que Hager les donne comme très anciens en Chine, ressembleraient à six chiffres du manuscrit d'Erlangen, savoir, à ceux que ce manuscrit donne pour les nombres 1, 2, 3, 8, 7, 4. Mais M. Cantor ne trouve pas que la haute antiquité de ces chiffres, en Chine soit prouvée, et sans nier que quelques-uns de nos chiffres puissent être originaires de Chine, il doute fort qu'ils en viennent tous. Hâtons nous d'ajouter qu'il faudrait, avant tout, examiner: 1°. si les ressemblances signalées par Hager sont assez nombreuses et assez marquées pour ne pouvoir pas être fortuites; 2°. si les chiffres chinois cités par lui ne sont pas originaires de l'Inde, à laquelle la Chine a emprunté tant de choses.

M. Cantor n'est pas moins indulgent pour l'hypothèse de M. Piccard 5), qui veut que les neuf chiffres de Boèce soient les neuf premières lettres d'un alphabet mixte, formé en empruntant des lettres à divers alphabets dérivés de l'alphabet phénicien. Le premier chiffre serait l'*iota* grec, qui, comme nous l'avons vu (chapitre VIII), avait signifié 1 avant de signifier 10. Le second chiffre serait le *beth* hébreu en diverses variantes. Le troisième serait le *gamma* copte, auquel ressemblerait un peu le *gamma* d'une inscription de la collection Farnèse. Le quatrième chiffre serait le redoublement du second, comme 4 est le double de 2. Le cinquième chiffre serait soit l'*upsilon*, identique pour la forme au V romain signifiant 5, soit plutôt une des formes du *hé*, cinquième lettre de l'alphabet samaritain. Le sixième chiffre serait formé soit par le retournement du cinquième, soit par le redoublement du troisième, ou bien ce serait un *vau* chaldaïque avec changement de position. Le septième chiffre serait le *zêta* grec dans ses diverses variantes. Le huitième serait un *cheth* hébraïque. Le neuvième viendrait de la neuvième lettre de l'alphabet phénico-samaritain, ou bien du *thêta* grec. Au lieu de remarquer le caractère chimérique de cet alphabet hétéroclite commençant par l'*iota* grec, M. Cantor déclare qu'il peut y avoir une part de vérité dans ces rapprochements de M. Piccard.

La diversité d'origine des neuf chiffres transmis à Boèce par les Pythagoriciens est confirmée, au jugement de M. Cantor, par les recherches de M. Vincent 6) sur la signification symbolique des figures des neuf chiffres, et des noms étranges qui leur sont donnés: il accepte les conclusions générales de ce savant, sauf à modifier quelques détails. Mais il conteste avec raison l'importance attribuée par M. Vincent, en faveur de la haute antiquité des neuf chiffres dans l'école pythagoricienne, à un fragment de Moderatus 7), qui concerne la signification symbolique des *nombres eux-mêmes* depuis 1 jusqu'à 10, et nullement la signification symbolique de *signes hiéroglyphiques* destinés à représenter ces nombres. M. Cantor admet cependant, comme *vraisemblable*, que les Pythagoriciens de l'école alexandrine, *possédant d'avance les neuf chiffres*, trouvèrent des interprétations plus ou moins forcées pour ces neuf figures 8).

Au contraire, aucun auteur un peu ancien n'ayant jamais attribué à la vieille école pythagoricienne antérieure à Aristote un système de neuf chiffres symboliques pour les neuf premiers nombres, il me paraît très probable qu'au lieu de *posséder d'avance* et dès longtemps les neuf chiffres, les Néopythagoriciens en avaient formé eux-mêmes la série symbolique à Alexandrie, de même que, de l'aveu de M. Cantor, ce sont eux qui ont imaginé les signes pour les notes musicales. Mais, dans l'invention de la série des neuf chiffres, ils ont fait des emprunts à l'Egypte et peut-être aussi à l'Asie.

---

5) *Mémoire sur la forme et la provenance des chiffres servant à la numération décimale chez les anciens et chez les modernes (Société Vaudoise des sciences naturelles*, 20 avril et 4 mai 1859). — 6) *Des notations scientifiques à l'école d'Alexandrie (Revue Archéol.*, 15 janvier 1846). — 7) Dans Porphyre, *Vie de Pythagore*, p. 48-53 (éd. Küster). De même, les textes d'Aristote cités par M. Vincent concernant les *nombres* et nullement les *chiffres*. — 8) Comme exemples modernes d'interprétations forcées, M. Cantor cite l'étymologie latine (*s. ins.* pour *semis inscriptæ*) donnée par Godin au mot géométrique *sinus*, qui est la traduction du mot arabe *dschaib*; l'étymologie du mot *abacus*, qui viendrait d'*arabicus* suivant Pacioli, les diverses étymologies données au mot *algoritmus* avant que M. Reinaud eût indiqué la vraie; les explications proposées par Priscien pour les chiffres romains et par Abenragel pour les chiffres indiens.

*

Je dis que certainement ils ont emprunté des chiffres à l'Egypte. En effet, M. Cantor (p. 239) reconnait avec moi que les chiffres pythagoriques de Boèce pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9 ont une ressemblance incontestable avec les signes hiératiques des anciens Egyptiens pour les nombres ordinaux correspondants dans la désignation des jours du mois 9). Cependant, avec Hager, il incline à faire venir de la Chine les quatre premiers chiffres, et il pense qu'il peut y avoir du vrai dans l'hypothèse de M. Piccard, qui fait venir des alphabets sémitiques les chiffres 1, 2, 3, 4 et 9, de même que les quatre autres. Pour concilier ces adhésions complaisantes qu'il donne à des hypothèses contradictoires, M. Cantor n'aurait qu'un moyen : ce serait d'admettre encore une autre hypothese, celle de M. de Paravey 10), d'après laquelle les alphabets et les chiffres de tous les peuples seraient identiques et remonteraient à un seul alphabet primitif. Mais M. Cantor, qui a écarté cette hypothèse, aime mieux déclarer vaguement que les neuf chiffres de Boèce sont empruntés aux sources les plus diverses.

Cette diversité est moins grande que M. Cantor ne le suppose. Car, puisque cinq des neuf chiffres de Boèce, avec le mêmes valeurs, sont très antiques dans l'écriture hiératique des Egyptiens, il ne reste plus à chercher que l'origine des quatre autres chiffres, origine peut-être sémitique, s'il y a du vrai dans les conjectures de M. Piccard. Quoi qu'il en soit, je ne pense pas, comme M. Cantor, que l'école néopythagoricienne ait seulement *mis son estampille* sur la série antiquement pythagoricienne des neuf chiffres; je pense, au contraire, que les nouveaux pythagoriciens ont formé eux-mêmes cette série, sur laquelle ils ont imprimé le cachet de leurs doctrines. Si tout cela avait été connu des anciens Pythagoriciens, l'antiquité en aurait su quelque chose. Du reste, je revicndrai tout à l'heure sur cette question d'origine.

Après avoir remarqué le caractère arbitraire, vague, indécis et mobile du symbolisme des Pythagoriciens, caractère qui permet d'appliquer la même idée à des nombres différents et des idées tout-à-fait différentes à un même nombre, M. Cantor indique les modifications qu'il croit devoir apporter aux interprétations que M. Vincent a données aux figures des chiffres de Boèce en les comparant avec les idées que les Pythagoriciens attachaient aux nombres représentés par ces chiffres 11).

Pour les figures des trois premiers chiffres de Boèce, M. Cantor s'accorde entièrement avec M. Vincent, qui reconnait dans ces trois chiffres la représentation du *principe femelle* 12) du *principe mâle* 13) et de l'*union de ce deux principes* 14).

Pour le quatrième chiffre, malgré sa ressemblance avec la *croix ansée* des Egyptiens, *clé* de la *vie* divine 15), M. Cantor croit plutôt que c'est le chiffre 2 redoublé. Mais il aurait dû reconnaitre que les Néopythagoriciens, et même les anciens Egyptiens, qui avaient ce même chiffre, pouvaient y voir en même temps la *croix ansée*, symbole du nombre 4, *porte-clé de la nature* 16). Il faut donc admettre l'explication de M. Vincent, sans exclure absolument celle de M. Cantor.

Tous deux admettent que les Néopythagoriciens ont assimilé le chiffre 5, *nombre de la justice et de l'équilibre* 17) et *image de la balance* 18) avec le crochet au quel le fléau de la balance est suspendu.

---

9) Voyez ci-dessus, chap. I. — 10) *Essai sur l'origine unique et hiéroglyphique des chiffres et des lettres de tous les peuples* (Paris, 1826). — 11) Les indications de M. Vincent et de M. Cantor, sur les textes qui constatent ces idées des Pythagoriciens, seront complétées par moi dans les notes suivantes. — 12) L'unité était considérée comme *mère*, en même temps que comme *père*. Voyez la *Théologie arithmétique* d'un néopythagoricien anonyme, ch. I, p. 5, l. 4-6 et l. 31-36 (éd. Ast, Leipzig, 1817, in-8), et Macrobe, *Somn. Scip.* I, 6, p. 38, éd. Janus (Quedl. et Leipzig, 1848, in-8). — 13) Le nombre *deux* était le Symbole du *courage viril*. Voyez *Théol. arithm.*, ch. 2, p. 7, et Aristide Quintilien, *Musique*, III, p. 156 de Meybaum. — 14) Le nombre *trois* était considéré comme la réunion de *un* et de *deux* (Voyez *Théol. arithm.*, ch. 3, p. 15, l. 4-5) et il était nommé *mariage* (p. 16, l. 21). — 15) Voyez Raoul-Rochette, *Acad. des Inscriptions*, t. XVII, IIe partie, p. 134-135, et p. 375-387, et les autorités citées par M. Vincent, *Des notions scientifiques*, p. 5. — 16) Le nombre *quatre* était nommé *porte de la nature* par les Pythagoriciens. Voyez *Theol. arithm.*, ch. 5, p. 29, l. 1-2, et p. 31, l. 4-5. — 17) *Théol. arithm.*, ch. 5, p. 26-29 et p. 30; Asclepius *Sur la Métaphys. d'Aristote*, I, 8, p. 541 *a*, l. 5-6 (Brandis), et un scoliaste, p. 541 *b*, l. 16 et suiv. et l. 28, et Jamblique, *Sur la science mathematique* (*Anecd. græc.* de Villoison, t. 2, p. 200, l. 17). — 18) C'est l'expression même de la *Théol. arithm.*, ch. 5, p. 20, l. 1-2, et p. 21, l. 4-5.

M. Cantor admet aussi que la forme primitive et authentique du sixième chiffre est bien celle que M. Vincent désigne, et qu'elle représente, par une ligne droite verticale à côté d'un cube, l'*once*, comme petite unité tant de longueur que de poids. En effet, suivant une lettre de Théodoric adressée précisément à Boèce 19), l'*once* est le symbole du nombre 6, *nombre parfait* 20), c'est-à-dire égal à la somme de ses facteurs (l'unité comprise).

Mais, pour les trois derniers chiffres, M. Cantor doute que M. Vincent ait eu raison d'y reconnaître la dernière des deux triades d'idées mentionnées dans le Commentaire d'Olympiodore sur le *Phédon* 21). En effet, c'est tout-à-fait arbitrairement que M. Vincent rapproche ces deux triades d'idées et les trois triades des neuf premiers nombres, et que, laissant de côté la première triade d'idées, il établit, entre la seconde triade d'idées et la troisième triade de nombres, un rapprochement auquel rien n'indique que les pythagoriciens aient jamais songé.

Cependant, pour d'autres raisons plus acceptables, M. Cantor admet, avec M. Vincent, que le neuvième chiffre signifie la *force*, représentée par la forme ithyphallique de ce chiffre sur l'abacus du manuscrit de Chartres 22), et que l'idée de *force* convient au nombre 9, parcequ'il est le premier *carré d'un nombre impair* 23), et que le *carré* d'un nombre se nomme *puissance* (δύναμις) en grec.

Mais M. Cantor refuse d'admettre, avec M. Vincent que dans le septième chiffre les Pythagoriciens aient vu un compas, symbole de la *grandeur*. En effet, aucun auteur ancien n'attribue cette signification au nombre 7. Avec plus de vraisemblance, M. Cantor voit, dans la figure du septième chiffre de Boèce, une faux ou un gnomon, tous deux symboles du *temps*. En effet, les Pythagoriciens donnaient au nombre 7 un nom (ἀγελεία) qui suivant eux rappelait les sept planètes 24), nommées *instruments du temps* par Platon 25). Mais je dois dire qu'au lieu de nommer le nombre *sept* nombre du *temps* (χρόνος), comme M. Cantor le prétend, ils le nommaient 26) *temps favorable* (καιρός).

M. Cantor ne veut pas non plus admettre, avec M. Vincent, que dans la figure du huitième chiffre les Pythagoriciens aient vu un serpent, symbole de la *santé*. En effet, aucun texte ancien ne vient à l'appui de cette interprétation 27). Mais celle de M. Cantor n'est pas mieux autorisée, et elle est plus invraisemblable: il veut que le huitième chiffre ressemble à deux cercles représentant les *huit* sphères célestes. Quel rapport y a-t-il entre *deux cercles tangents l'un à l'autre* et *huit sphères concentriques?*

En résumé, l'explication symbolique de M. Vincent pour les figures des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 9 de Boèce, est très probable d'après ce que nous savons des idées des Pythagoriciens. Pour le chiffre 7, l'explication de M. Cantor a un peu de la vraisemblance qui manque à celle de M. Vincent. Pour le chiffre 8 de Boèce, une explication symbolique plausible d'après les idées des pythagoriciens est encore à trouver.

M. Cantor a raison de considérer comme bien établi ce fait général, que les néopythagoriciens attribuaient un sens symbolique aux figures des neuf chiffres, transmises à Boèce par Archytas le latin.

---

19) Cassiodori *Var. epist.*, I, 10, fol. 2 verso (Paris, 1588, in-4). — 20) Euclide. *Elém.* VII, Déf. 22; *Théol. arithm.*, ch. 6, p. 38; Théon de Smyrne, *arithm.*, ch. 74 et 77 (*Mus.*, ch. 42 et 45), p. 158-160 (Paris, 1644, in-4); Plutarque, *Questions de table*, IX, 2, § 2, et *De la procréation de l'âme suivant le Timée*, ch. 13; Macrobe, *Somn. Scip.* I, 6, t. 1, p. 30; *Saturn.*, VII, 13, t. 2, p. 022 (éd. Janus); Martianus Capella, VII, 736, p. 588-600 (éd. Kopp). — 21) P. 24, l. 23-25, éd. Finckh, Heilbronn, 1847, in-8. M. Cantor se trompe, en disant que ce commentaire est inédit. — 22) Figure 43 de M. Cantor. — 23) Théon de Smyrne, *Arithm.* ch. 80 (*Mus.*, ch. 48), p. 165. Comparez Plutarque, *Questions de table*, IX, 14, § 2. — 24) *Théol. arithm.*, ch. 7, p. 42-43. — 25) *Timée*, p. 42 A. Comparez p. 38 C et p. 39 E. — 26) *Théol. arithm.*, ch. 7, p. 44, l. 25-26, et p. 53, l. 7-10; Alexandre d'Aphrod., *Sur la Métaphys.* d'Aristote, I, 6, p. 28-29 et p. 56 (éd. Bonitz); Asclepius, *Sur la Métaph.*, I, 8, p. 541 *a*, l. 2 et suiv. (éd Brandis), et un scoliaste, ibidem, p. 541 *b*, l. 31. — 27) C'était le nombre *six* qui était nommé *santé*. Voyez *Théol. arithm.*, ch. 2, p. 34-35, p. 37, l. 15, et p. 38, l. 14. Le nombre *huit* n'était pas nommé *santé*, mais *stabilité*. Voyez *Théol. arithm.*, ch. 8, p. 55, dernière l., et Macrobe, *Somn. Scip.* I, 2, t. 1, p. 35 (éd. Janus). Quant au nom Καδμεία donné au nombre *huit*, il signifiait *Harmonie*, fille de Cadmus, et n'avait aucun rapport avec le *serpent* de Cadmus, non plus qu'avec celui d'Esculape. Voyez *Théol. arithm.*, ch. 8, p. 54.

De plus, la lettre de Théodoric à Boèce autorise M. Cantor à penser que Boèce n'ignorait pas ces explications symboliques des neuf chiffres 28).

Mais, sur les figures de ces chiffres de Boèce, je dois placer ici une remarque importante, qui a échappé à M. Cantor. Ce n'est pas au hasard que ces figures, qui n'ont aucun rapport naturel avec les nombres qu'elles représentent, ont été choisies les unes dans l'écriture hiératique des Egyptiens, les autres peut-être dans des alphabets sémitiques: elles ont été choisies évidemment en vue des explications symboliques plus ou moins forcées qu'on voulait leur donner. Les auteurs de ce symbolisme des neuf chiffres, c'est-à-dire les néopythagoriciens d'Alexandrie, sont donc en même temps les formateurs éclectiques de cette série de signes numéraux au lieu de les avoir reçus des anciens pythagoriciens, comme M. Cantor le suppose. Ils y ont mis le cachet de leur secte, en les modifiant pour les adapter à leur symbolisme

Ensuite M. Cantor aborde l'explication des dix mots bizarres écrits au dessus des neuf chiffres et du dixième signe sur l'abacus dans les manuscrits de Chartres et d'Erlangen. Ces mots se retrouvent, avec diverses variantes, dans d'autres manuscrits du XIe siècle. M. Chasles a rencontré les huit premiers, sans le neuvième *(Celentis)*, mais avec le nom du dixième signe *(sipos)*, dans une page du manuscrit de Chartres en dehors de la *Géométrie* de Boèce 29): ces neuf mots y sont expliqués par neuf vers latins; la plupart de ces vers ne donnent que la correspondance du nom et du nombre: l'*éclot* du *septimus honor* dans le septième vers, et le surnom de *béatifique* donné au nombre 8, n'offrent que des indications trop vagues pour être utiles; mais le sixième vers, en désignant le nombre 6 comme *parfait*, appuie un peu l'explication de M. Vincent, et le quatrième vers appuie celle que M. Cantor ajoute à celle de M. Vincent pour le chiffre 4 considéré comme double du chiffre 2.

Quant au sens des dix mots eux-mêmes, Huet, évêque d'Avranches, avait déjà remarqué le caractère sémitique de quatre d'entre eux. Les mots *arbas*, *quimas*, *et zenis* sont, suivant M. Cantor comme suivant M. Nesselmann et M. Vincent, des formes altérées des mots hébreux qui signifient 4. 5 et 7. Le mot *temenias*, suivant les mêmes savants, rappellerait plutôt le mot *araméen* signifiant *huit*; mais la forme *zementas*, fournie par un manuscrit d'Oxford, serait favorable à une étymologie hébraïque. M. Gildemeister se prononce pour une étymologie arabe des quatre mots, et M. Nesselmann ne la repousse pas absolument. M. Spiegel n'incline à admettre une étymologie arabe que pour le mot *sipos*, dont nous parlerons plus tard. Pour les cinq autres mots, les étymologies orientales proposées par MM. Nesselmann et Gildemeister sont inadmissibles 30).

Suivant M. Vincent, ces cinq mots, *igin*, *andras*, *ormis*, *calcis* (avec les variantes *coltis*, *calctis* et *chalcus*), et *celentis*, sont des mots grecs, traduits d'abord en hébreu, puis de l'hébreu en latin, et plus ou moins défigurés dans ces deux traductions 31). Les significations qu'il donne à ces mots s'accordent avec les symboles pythagoriques qu'il avait signalés dans les figures des chiffres pour les nombres 1, 2, 3, 6 et 9. Suivant lui, le mot *igin* vient de ἡ γυνή *(i gyni)*, *la femme*; *andras*, vient de ἀνήρ, ἀνδρος, *l'homme mâle (vir)*; *ormis* vient de ὁρμή *(ormi)*, *appétit sexuel*; *calcis* ou *chalcus* vient de χαλκοῦς, synonyme de οὐγγία 32), *once*; *celentis* vient de ἀθήλυντος *(athélyntos)*, *viril*, et l'a initial a disparu par une

28) A ces propos, M. Cantor dit qu'un manuscrit du Vatican doit contenir un ouvrage de Boèce, en deux livres, *Sur les nombres*. Je présume que c'est tout simplement l'*Arithmétique* de Boèce. Cependant, suivant le vœu de M. Chasles répété par M. Cantor, il serait bon de s'assurer de l'existence et du contenu de ce manuscrit. — 29) Ces vers se trouvent dans la note 460, p. 414 de M. Cantor. — 30) Suivant M. Nesselmann, *Igin* et *Andras* viendraient des mots arabes *echad (un)* et *achar (l'autre)*, suivant M. Gildemeister, *Igin* viendrait du mot persan *yagân (un)*, et *Andras* du mot arabe *Annadir (point opposé)*. — 31) M. Bienaimé, cité par M. Wœpcke *(Propagation des chiffres indiens*, p. 25), veut que *coltis* vienne de καλότης; *Zenis* de Ζηνὶς, dans le sens de *fille de Jupiter*, et *celentis* de σελήνη. Mais les néopythagoriciens disaient καλλος et non καλοτης, et ils n'établissaient aucun rapport spécial entre le nombre 6 et la *beauté*, qui était l'attribut du nombre 3 (Voyez Aristide Quintilien, *Musique*, III, p. 156 de Meybaum, et la *Théol. arithm.*, ch. 3, p. 18). Ils n'établissaient non plus aucun rapport spécial entre le nombre 9 et la *Lune*, qui était la patrone du nombre 2 (Voyez *Théol. arithm.*, ch. 2, p. 12). *Sept* était le nombre de Minerve (Voyez *Théol. arithm.*, ch. 7, p. 53); mais Minerve (Athéné) ne se nommait pas Ζηνὶς, et ces mot n'a jamais été grec. — 32) Οὐγγια, *uncia*, synonyme de χαλκοῦς, est un mot d'origine sicule, suivant Julius Pollus, *Onom.*, IX, 6.

mutilation opérée dans la transcription hébraïque 33). Les Kabbalistes juifs, alliés aux néopythagoriciens alexandrins ont transmis ces mots aux latins. Mais à quelle époque faut-il placer cette transmission? C'est là une question que M. Vincent n'a pas abordée.

Cette question a été traitée d'une manière malheureuse par M. Gerhardt 34): ayant constaté avec raison la ressemblance très grande des chiffres arabes *gobâr* avec ceux de Boèce, il veut que ces derniers soient arabes, mais qu'ils aient été attribués aux Pythagoriciens grecs par un faussaire juif du Ier siècle de notre ère, et qu'adoptés au IIe siècle par les Kabbalistes, ils aient été transmis par eux aux chrétiens. Mais M. Cantor a raison de soutenir, contre M. Gerhardt, que parmi ces noms bizarres des neuf chiffres il y en a qu'il est impossible de faire venir de l'hébreu ou de l'arabe, et que plusieurs sont des noms grecs transcrits en hébreu, puis de l'hébreu en latin. J'ajoute qu'il est très improbable que les Arabes eussent leurs chiffres *gobâr* dès le Ier siècle de notre ère, tandisqu'au commencement du VIIe siècle, possédant à peine une écriture 35), ils n'avaient pas de chiffres, ou bien ils avaient des chiffres très différents de ceux du système *gobâr* 36). J'ajoute encore qu'au Ier siècle il y avait aussi peu de relations entre les Arabes et les Juifs hellénistes, qu'entre les Arabes et les pythagoriciens grecs. Enfin, je remarque, avec M. Cantor, que si les neuf chiffres avaient figuré dès le premier siècle dans des écrits attribués aux anciens pythagoriciens, écrits grecs apocryphes qu'on lisait beaucoup alors, la connaissance en aurait été très repandue; l'écrivain latin Archytas et Boèce n'auraient pas été seuls à en parler, jusqu'au VIe siècle.

M. Cantor dit fort bien que Boèce a dû connaître, avec les neuf chiffres, les noms grecs par lesquels les néopythagoriciens en exprimaient la signification; mais qu'il est impossible que ces mots grecs aient été écrits par Boèce, ou par Archytas avant lui, sous des formes barbares telles qu'*igin, andras, ormis caltis* et *celentis*. Par conséquent, sur les *abacus* des manuscrits de Chartres et d'Erlangen, la ligne qui contient ces noms appartient aux copistes interpolateurs, comme plusieurs lignes déjà signalées. On trouve dans cette ligne et dans celle des neuf chiffres un dixième nom et une dixième figure évidemment inconnus à Boèce, qui ne parle pas de cette figure, tandisqu'il parle des neuf autres. Cette dixième figure, bien connue des copistes du XIe siècle, c'est le *sipos en forme de roue,* comme il est appelé dans le neuvième et dernier vers du manuscrit de Chartres, c'est-à-dire le *zéro,* nommé aussi *sipos* sur l'*abacus* dans les deux manuscrits.

M. Cantor pense, avec M. Vincent, que le mot *sipos* vient du mot hébreu *saph (vase)* 37); mais entre le *zéro* et un *vase* je vois peu de rapport soit de forme, soit de signification. Je persiste à croire, avec M. Chasles, que *sipos* vient plutôt du mot grec ψῆφος *(psiphos), jeton.* M. Cantor m'objecte que *les Grecs* n'ont pas connu le vrai zéro. Mais, outre l'ο grec, employé anciennement par les astronomes grecs pour marquer l'absence d'un certain ordre de subdivisions du cercle et du jour 38), *les Grecs byzantins* purent connaître, avant le XIe siècle, le zéro indien des Arabes orientaux, qui lui conservèrent d'abord sa forme circulaire 39); les Byzantins purent lui donner le nom de ψῆφος à cause de sa forme, et les écrivains latins du moyen-âge peuvent avoir emprunté aux Byzantins ce nom, en l'altérant 40). Qu'on n'oublie pas

---

33) Le mot ἀθήλυντος se trouve employé en ce sens dans la *Théologie arithmétique*, ch. 7, p. 53; mais c'est au nombre 7 qu'il est appliqué. Un même nom était donné souvent à deux ou plusieurs nombres: par exemple, le nom ἀρσενόθηλυς à 1 et à 6 (*Théol. arithm*, p. 5 et 33), le nom γαμος à 3 et à 6 (ibid. p. 18 et 33), et les noms ἀνδρογυνία et γαμηλία, synonymes des deux précédents, au nombre 6 (ibid. p. 32). — 34) *Die Entdeckung der hæheren Analysis*, p. 96 et suiv. (Halle, 1855). — 35) Voyez Silvestre de Sacy, *Mémoire sur quelques papyres écrits en arabe et trouvés récemment en Egypte* (*Acad. des inscript.*, Nouv. série, t. IX, p. 78-80). — 36) Voyez le chapitre suivant. — 37) Mais M. Vincent rejette avec raison l'opinion de M. Nesselmann, qui fait venir *sipos* du mot arabe *cifra*, tandisque l'influence arabe a substitué ce dernier mot au mot *sipos*, antérieurement en usage chez les chrétiens. — 38) Voyez ci-dessus, chapitre VIII. — 39) Voyez le chapitre suivant. — 40) De l'étymologie, grecque ou hébraïque, et non indienne ou arabe, du mot *sipos*, M. Wœpcke (*Propagation des chiffres indiens*, p. 62-63, et note 2) croit pouvoir conclure que ce nom a été appliqué d'abord à ce qu'on peut appeler le *zéro grec*, qui différait du *zéro indien* et *arabe*, surtout par son usage. Mais ce *zéro grec* était la lettre grecque ο, qui n'avait pas besoin d'autre nom, et M. Wœpcke, comme M Cantor, oublie les Grecs byzantins, qui ont pu connaître de bonne heure le *zéro indien des Arabes orientaux*, et chez qui le moine arithméticien Planude avait eu sans doute des prédécesseurs.

l'influence scientifique et littéraire des Grecs byzantins, ravivée en occident, dès le Xe siècle, par la princesse grecque Théophanie, impératrice en Allemagne, et protectrice de Gerbert 41). Du reste, cette question de l'étymologie du mot *sipos* est peu importante.

Voici comment M. Cantor (p. 250) résume son opinion sur l'origine des neuf chiffres de Boèce et des interpolations signalées dans sa figure de l'*abacus*, telle que les manuscrits la donnent.

« 1° Les Alexandrins possédaient neuf signes pour les nombres de 1 à 9.»

« 2°. Il donnèrent à ces chiffres des noms grecs, qui répondaient aux significations symboliques lues par eux dans ces neuf figures.»

« 3°. La connaissance de ces signes, et peut-être aussi de leurs noms, fut transmise aux Romains, vers le Ier ou le IIe siècle de notre ère, par un certain Archytas; mais son écrit latin fut à peine lu, jusqu'à l'époque où il fut recommandé par Boèce au public savant.»

« 4°. Pendant ce temps, les mêmes connaissances avaient pénétré dans les écoles des Kabbalistes, et s'unissant avec le zéro inventé sur ces entrefaits, probablement dans l'Inde, elles avaient formé dans ces écoles une série de dix signes.»

« 5°. Dans ces écoles juives, une partie des anciens noms grecs des neuf chiffres s'était conservée, une autre partie avait disparu, et pour le dixième signe il n'y avait aucun mot donné d'avance.

« 6°. Pour combler ces lacunes, quelques noms hébraïques durent être introduits.»

« 7°. Quand, des écoles juives, les signes et les noms passèrent aux chrétiens d'occident, il rencontrèrent tout à coup des éléments dont la similitude témoignait d'une parenté antique, mais qui n'avaient pas gardé avec les éléments nouveaux une parfaite concordance, et les copistes du XIe siècle, étonnés de recevoir de côtés si différents des éléments semblables, songèrent à compléter et à améliorer les uns avec le secours des autres.»

Sur ces sept propositions, je crois devoir faire les réserves suivantes:

Dans les deux premières propositions, il faut savoir gré à M. Cantor de n'avoir pas reproduit sa fausse hypothèse, d'après laquelle les neuf chiffres de Boèce viendraient des *anciens* pythagoriciens antérieurs à l'école d'Alexandrie. Mais je voudrais qu'il eût indiqué, comme époque probable de l'invention de ces neuf signes symboliques, les derniers temps de l'école d'Alexandrie, c'est-à-dire l'époque du néoplatonisme et du néopythagorisme, l'époque de Porphyre et de Jamblique. Je voudrais qu'il eût remarqué que l'emploi de ces neuf chiffres pour les calculs à faire sur l'*abacus* n'était pas pratiquement plus avantageux que l'emploi semblable des neuf lettres grecques désignant les mêmes nombres, et qu'ainsi, pour les Grecs, l'introduction de l'abacus à colonnes, mais non celle des figures des neuf chiffres, a constitué un progrès. Je voudrais qu'il eût ajouté que les Néopythagoriciens d'Alexandrie avaient formé cette série de neuf chiffres en prenant cinq chiffres aux anciens Egyptiens, et en inventant les quatre autres, probablement à l'imitation de quelques lettres sémitiques, et qu'ils avaient modifié et interprété ces figures, de manière à les adapter à leurs idées symboliques sur les neuf premiers nombres, idées exprimées par les noms grecs qu'ils donnaient à chacun de ces neuf chiffres.

Sur la troisième proposition, je remarque que l'époque de l'écrivain latin Archytas est probablement beaucoup plus rapprochée de l'époque de Boèce que M. Cantor ne le suppose, et que l'invention des neuf chiffres pythagoriques peut elle-même n'être pas de beaucoup antérieure.

Sur les quatre dernières propositions, je remarque que le *zéro* des Indiens, probablement peu ancien dans l'Inde même 42), n'aurait pu être mentionné dans les écrits des Kabbalistes juifs qu'après l'époque de Boèce, que de même les noms hébraïques donnés aux chiffres 4, 5, 7 et 8 sont probablement d'une

41) Voyez ci-après, chapitres XXI et XXII. Le jeune empereur Othon III, fils de Théophanie, priait Gerbert de venir ranimer chez lui par ses enseignements l'esprit vivace *des Grecs* (Voyez Duchesne, *Script. hist. franc.*, t. 2, p. 824). La Géométrie de Gerbert, écrite en Allemagne près d'Othon III, est pleine de mots grecs. Voyez ci-après, chapitre XXII. — 42) Voyez ci-dessus chap. IV.

époque postérieure à Boèce, et que la traduction des neuf noms et de celui du zéro en un latin barbare n'est probablement pas de beaucoup antérieure au XIe siècle.

Du reste, les vues de M. Cantor sur l'étendue et la cause des interpolations que la figure de l'*abacus* a subies dans les manuscrits de Boèce de la part des copistes du XIe siècle, subsistent avec toute leur importance. Il est bien constaté que les neuf chiffres, figurant dans le texte même de Boèce, sont authentiques, tandisque le zéro, dont M. Cantor complétera bientôt l'histoire, et les noms barbares des neuf chiffres et du zéro, sont interpolés.

XVII. Signes numéraux des Arabes. 1)

Puisque neuf chiffres peu différents des nôtres se trouvaient dans les œuvres de Boèce, si étudiées au moyen-âge, et puisque Boèce ne les avait pas empruntés aux Arabes, mais aux néopythagoriciens grecs par l'intermédiaire d'un grec écrivant en latin, M. Cantor est fondé à dire que l'hypothèse d'après laquelle ces neuf chiffres nous seraient venus uniquement des Arabes, ou des Indiens par les Arabes, est suffisamment réfutée 2). Mais nous verrons qu'une des formes du système arabe des neuf chiffres, forme trop peu connue de M. Cantor, a eu avec la formation de nos neuf chiffres, tels qu'ils sont aujourd'hui, des rapports historiques qui ont échappé à ce savant.

Le plan très étendu de son livre lui ordonnant de parler de toutes les formes de notation numérale qui ont existé chez les Arabes, il s'excuse modestement de l'insuffisance des documents qui ont été accessibles pour lui et des notions sommaires qu'il en a tirées. Il s'excuse aussi de la liberté qu'il a prise d'insérer dans ce chapitre des renseignements qu'il n'avait pas trouvé l'occasion de placer ailleurs. Il faut le remercier de ne les avoir pas omis, bien qu'on en trouve l'équivalent dans l'ouvrage de M. Pihan.

Après avoir rappelé ce qu'il a dit sur la manière ingénieuse des Grecs pour compléter leur notation alphabétique des nombres 3), M. Cantor explique comment, au contraire, les Hébreux se contentèrent longtemps des 22 lettres de leur alphabet, dont 9 leur servaient pour les unités simples, 9 pour les dixaines, et les quatre autres pour les quatre premiers nombres de centaines. Pour exprimer un nombre de centaines audessus de 4, ils réunissaient deux ou trois des quatre dernières lettres par addition. Plus tard, ils exprimèrent les cinq derniers nombres de centaines par les formes particulières que cinq des 22 lettres hébraïques prennent à la fin des mots. Pour exprimer les milliers jusqu'à 9000, ils mirent deux points audessus des lettres exprimant les nombres depuis 1 jusqu'à 900. Un petit crochet, placé audessus de la dernière lettre numérale ou avant elle, avertissait que dans ces lettres il ne fallait pas chercher des mots, mais des nombres. L'écriture allant de droite à gauche, les unités simples se mettaient à l'extrême gauche 4).

Depuis le milieu du VIIe siècle environ, les Arabes eurent leur écriture *cufique*, de laquelle ils tirèrent un système alphabétique de chiffres, peu différent de celui des Hébreux. Quant à leur écriture antérieure, il n'en reste que peu de traces 5), et nous ignorons, dit M. Cantor, si un système de chiffres s'y rattachait. M. Wœpcke 6) est pour la négative. M. Cantor admet que les Arabes pouvaient avoir alors des chiffres analogues au système non alphabétique de Palmyre.

Les Palmyréniens et les Phéniciens avaient des systèmes de notation alphabétique des nombres 7): M. Cantor n'en dit rien. En outre, certaines inscriptions de Palmyre, des trois premiers siècles de notre

---

1) *Die Zahlzeichen der Araber*, p. 261-263. — 2) Cette hypothèse, réfutée par M. Chasles, a été reproduite encore par M. Pihan, *Exposé des signes de numération usités chez les Orientaux*, Introd. p. XVI-XXIV (Paris, 1860, in-8). Malgré ses doutes sur l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce, M. Wœpcke (*Prop. des chiffres indiens*, p. 18-28) n'hésite pas à déclarer que les chiffres des manuscrits de Boèce viennent des Pythagoriciens, et que ces chiffres sont devenus les nôtres. — 3) Voyez ci-dessus, chapitre VIII. — 4) Pour plus de détails, voyez M. Pihan, p. 169-176. — 5) Comparez le Mém. de Silvestre de Sacy, *Acad. des inscr.*, t. IX, p. 78-80. — 6) *Propag. des chiffres indiens*, p. 55-56. — 7) Voyez M. Pihan, p. 162-164, et ce que nous avons dit ci-dessus, à la fin du chapitre Ier.

ère, expliquées au XVIII[e] siècle par Swinton, présentent un système de quatre chiffres, qui, pris isolément, signifient 1, 5, 10 et 20, mais dont les combinaisons, aidées du trait horizontal, pouvaient exprimer tous les nombres par un procédé que M. Cantor décrit 8), et qui, malgré de notables différences, ressemble à la fois à celui de la notation hiéroglyphique des Egyptiens et surtout à celui de la notation cunéiforme des Babyloniens. Une forme un peu différente de ce système palmyrien et de ses quatre figures est donnée par M. Pihan (p. 167-168) d'après Hoffmann.

M. Cantor aurait dû ajouter que les Phéniciens avaient d'une part une notation alphabétique des nombres, d'autre part une notation non alphabétique, qui n'avait des signes particuliers que pour 1, 10, 20 et 100, et qui, pour la manière d'exprimer les autres nombres avec ces quatre signes, ressemblait à la notation hiéroglyphique des Egyptiens plus encore qu'à celle de Palmyre. M. Pihan (p. 164-167) fait connaître, d'après Gesenius, cette notation phénicienne.

Le système de signes numéraux constaté par M. Rœdiger dans des manuscrits syriens du VI[e] et du VII[e] siècle, diffère peu du système non alphabétique de Palmyre, si ce n'est par la réunion de deux traits en un seul chiffre pour signifier 2, et par l'addition de ce chiffre avec les autres et avec lui-même 9).

En outre, les Syriens avaient une notation alphabétique, qui employait les 22 lettres de leur alphabet, sous la forme soit syriaque, soit nestorienne, soit estranghelo 10), pour exprimer, à la manière des Hébreux, tous les nombres jusqu'à 400. Pour les cinq nombres supérieurs de centaines, ils mettaient un point au-dessus de la lettre qui exprimait le même nombre de dizaines. Une virgule mise sous les dizaines en faisait des milliers, et cette virgule pouvait être omise, quand la valeur de la lettre était suffisamment indiquée par sa position à la droite de lettres exprimant des nombres plus petits. Un trait horizontal sous une lettre en multipliait la valeur par 10000. Deux virgules en sens inverse sous chaque lettre en multipliaient la valeur par un million.

Après avoir indiqué ainsi les méthodes de notation numérale employées par les peuples voisins des Arabes (p. 252-256), M. Cantor arrive à celles des Arabes eux-mêmes, en commençant par leurs notations alphabétiques des nombres. Mais, dans l'exposé de ces notations, il bouleverse trop l'ordre chronologique. C'est ainsi qu'après quelques mots sur l'alphabet arabe, il commence (p. 258) par les *chiffres diwânis*, abréviations des noms de nombre imaginées après coup par les Arabes pour le secret des opérations financières du *diwân*, comme les *chiffres syâks* des Persans pour le secret des opérations commerciales 11). C'est encore ainsi qu'il finit par l'usage arabe des lettres numérales (p. 259), c'est-à-dire par où il aurait dû commencer.

Comme le dit M. Wœpcke 12), les Arabes, d'abord illétrés, adoptèrent comme chiffres les lettres numérales des peuples conquis: en Syrie, les lettres numérales grecques, qu'ils gardèrent jusqu'à la fin du VII[e] siècle; en Egypte, les chiffres koptes, qui sont les lettres numérales grecques altérées 13). Depuis l'an 639, ils eurent leur *alphabet cufique* (ainsi nommé de Cufa ou Coufa sur l'Euphrate); mais l'usage des *chiffres cufiques* 14), c'est-à-dire l'emploi numéral des lettres de cet alphabet, ne commença pas avant la fin du VII[e] siècle; il prit alors la place des lettres numérales grecques, et dura jusqu'à la fin du IX[e] siècle 15). Les *chiffres niskys* sont les lettres de l'*alphabet nisky*, que les Arabes du X[e] siècle substituèrent à l'alphabet cufique. M. Cantor ne remarque pas que les *lettres maghrebines*, dont l'ordre alphabétique n'est pas tout-à-fait le même et dont la forme est légèrement différente, étaient employées au même usage numéral chez les Arabes occidentaux. Jusqu'à la fin du X[e] siècle, les Arabes employèrent à la manière

8) P. 254-255, et figure 48. M. Cantor remarque que les Aztèques sont le seul peuple chez lequel 20 ait de même un signe spécial, à l'exclusion des nombres de dizaines plus élevés. — 9) Voyez M. Cantor, p. 256. Comparez ci-dessus la fin du chapitre I[er]. 10) M. Cantor (p. 256) ne fait pas cette distinction. Mais voyez M. Pihan, p. 194-198. — 11) Sur les *chiffres diwânis* et *syâks*, voyez M. Pihan, p. 210-212, p. 215-225 et p. 234-237, et M. Wœpcke, *Propag. des chiffres indiens*, p. 196. — 12) *Propag. des chiffres indiens*, p. 56-57. — 13) Voyez M. Pihan, p. 218-211. — 14) Ces chiffres manquent chez M. Pihan. — 15) Voyez M. Cantor, p. 259, et surtout M. Wœpcke, p. 56-56.

des Hébreux leurs 22 lettres soit cufiques, soit nisky, soit maghrebines, prises suivant l'ordre différent de ces alphabets, et, comme les Hébreux, ils procédèrent par addition audessus de 400. Mais, à partir du XIe siècle, pour exprimer les cinq derniers nombres de centaines et le nombre 1000, ils employèrent six lettres distinguées par des *points diacritiques*, qui marquaient aussi une différence de prononciation. C'est ce dernier système seul qui est donné par M. Pihan (p. 200-204), et il l'est à la fois en lettres *nisky* et en lettres *maghrebines*. M. Cantor ajoute que les lettres ainsi employées étaient soit les lettres finales, toutes d'une forme particulière en arabe comme en syriaque, soit les lettres ordinaires, mais surmontées d'un trait horizontal. Dans cette notation arabe, comme dans celle des autres peuples orientaux, les unités d'ordre supérieur se mettaient à droite des unités d'ordre inférieur. Mais, pendant que les Arabes perfectionnaient cette notation alphabétique des nombres, ils reçurent une autre notation d'origine étrangère, qui procédait de gauche à droite.

Les témoignages invoqués par M. Cantor (p. 259-260), et surtout ceux que M. Wœpcke a cités 16), nous font connaître l'histoire de l'introduction des sciences indiennes chez les Arabes orientaux, à Bagdad, dans la seconde moitié du VIIIe siècle. Dans la première moitié du IXe, le plus célèbre propagateur des sciences indiennes chez les Arabes, Mohammed ben Mousa Alkharizmi composa un traité du calcul indien, où se trouvaient employés les neuf chiffres indiens et le zéro avec valeur de position. Au milieu du IXe siècle, Alkindi écrivait, outre son traité d'arithmétique, un traité spécial sur le calcul indien, et Sind-ben-Ali écrivait un autre traité sur le même sujet vers la même époque 17). D'autres traités, en grand nombre, sur le calcul indien ont été composés au Xe siècle et au XIe chez les Arabes orientaux 18). Cependant, chez eux, l'emploi des neuf chiffres avec le zéro et avec valeur de position n'est pas devenu vulgaire, comme chez les Européens 19), et la notation numérale en lettres arabes est restée prédominante 20). M. Cantor dit que chez les Arabes la notation en *chiffres indiens*, ainsi nommés par les Arabes eux-mêmes, est restée propre aux savants. M. Wœpcke 21) signale de plus ce fait, que, parmi les savants eux-mêmes, les astronomes arabes n'employèrent jamais que les lettres numérales dans leurs tables astronomiques, il remarque même que jusqu'au XVe siècle et au XVIe on trouve des traités arabes d'arithmétique où les nombres sont désignés par des mots numératifs, sans qu'on y rencontre un seul chiffre, et que, pour les opérations financières et commerciales, les chiffres *diwânis* et *sydks*, qui ne sont que des abréviations de la numération parlée, ont gardé la préférence.

Dans cet aperçu rapide de l'introduction de la notation indienne chez les Arabes d'Orient, j'ai suivi M. Cantor, en complétant ses indications par celles de M. Wœpcke. Dans l'histoire, plus importante pour nous, des chiffres employés par les Arabes occidentaux, il me semble nécessaire de suivre une autre marche, parceque les notions de M. Cantor sur ce point sont vagues et insuffisantes. Je vais donc exposer en peu de mots les faits que M. Wœpcke a mis en lumière; mais j'indiquerai quels sont ceux de ces faits que M. Cantor a signalés, et quels sont ceux qu'il a ignorés ou mal interprétés. Puis je combattrai des hypothèses ajoutées à ces faits tant par M. Wœpcke que par M. Cantor, et enfin j'oserai dire mon opinion sur cette question grave et difficile de l'origine des *chiffres gobâr*, et de leurs rapports avec nos chiffres modernes.

Les textes arabes cités par M. Wœpcke 22) mettent audessus de toute contestation ce fait, à peine entrevu par MM. Cantor, Friedlein et Gerhardt, que les neuf *chiffres gobâr* sont surtout les chiffres des

---

16) *Propag. des chiffres ind.*, p. 57-66, p. 60-63, p. 120-131 et p. 139-147, et *Introduction de l'arithmétique indienne en occident* (Rome, 1859, in-4), p. 51-63. Voyez aussi Cossali, *Lezioni II et III sull'aritmetica (Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni*, p. 323-334 (Roma, 1857, in-4). — 17) Voyez M. Wœpcke, *Prop. de chiffres ind.*, p. 156-162, et M. Cantor, p. 259-260. — 18) Voyez M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 156 et suiv. — 19) Voyez M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 129-131 et p. 194-196. — 20) Voyez M. Cantor, p. 260. — 21) *Introd. de l'arithm. ind. en occident*, p. 52-55, et *Propag. des chiffres ind.*, p. 129-132 et p. 195-196. — 22) *Propagations des chiffres indiens*, p. 39-46, et *Introd. de l'arithm. ind.*, p. 55.

*

Arabes occidentaux, par opposition aux *chiffres indiens*, transmis de l'Inde aux Arabes orientaux et par ceux-ci aux Byzantins. Ce sont les *chiffres indiens* qu'on trouve au XIVe siècles chez les moines byzantins Maxime Planude 23) et Néophytus 24). Cependant les mêmes textes arabes constatent que les neuf *chiffres gobâr* avaient aussi pénétré en orient, mais qu'ils y étaient peu en usage, et qu'ils y avaient une forme un peu différente de celle des *chiffres gobâr occidentaux*. Les *chiffres gobâr d'Orient* sont les seuls que M. Cantor paraisse avoir connus et qu'il donne dans ses planches 25), mais sans savoir de quel peuple ils viennent (p. 262). M. Pihan, au contraire, dans son chapitre sur la numération arabe (p. 208-209), donne fort bien, sous le nom de *chiffres gobâr asiatiques*, les *gobâr orientaux*, et sous le nom de *chiffres gobâr maghrebins*, les *gobâr occidentaux*. M. Cantor (p. 261-262) croit que le système des neuf chiffres gobâr, en occident comme en orient, n'avait primitivement ni zéro ni valeur de position, l'ordre décimal de chaque chiffre étant toujours indiqué par autant de points mis audessus de chaque chiffre qu'il avait d'ordre décimaux audessous du sien, et cela soit qu'il y eût ou non des unités des ordres inférieurs. M. Pihan, au contraire, donne (p. 208-209) le système gobâr asiatique avec points audessus des chiffres sans zéro ni valeur de position, et le système gobâr maghrebin avec zéro et valeur de position. Mais M. Wœpcke 26) a prouvé que les Arabes ont employé de ces deux manières les neuf *chiffres gobâr* et les neuf *chiffres indiens*, en orient comme en occident, en mettant quelquefois des zéros circulaires au lieu de points audessus des chiffres 27).

De plus, M. Wœpcke 28) signale ce fait patent 29), qui a échappé à M. Cantor 30), que les *chiffres gobâr*, à peu près semblables aux *chiffres indiens* des Arabes pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, sont tout-à-fait différents de ces chiffres pour les nombres 5, 6, 7 et 8. En effet, Mohammed ben Mousa Alkharizmi 31) déclare que, pour les figures de ces quatre chiffres seulement, *on n'est pas d'accord*. Au contraire tous les neuf chiffres des manuscrits de Boèce ont une ressemblance frappante avec les neuf chiffres gobâr, et surtout avec les neuf chiffres gobâr maghrebins, qui eux-mêmes sont tous très semblables à nos neuf chiffres modernes, de sorte que l'imitation des chiffres maghrebins explique la transition, qui s'est opérée, par l'écriture cursive du moyen-âge, entre les figures des chiffres des manuscrits de Boèce et les figures de nos chiffres 32). Enfin, M. Wœpcke 33) constate que les méthodes indiennes des Arabes orientaux s'introduisirent vers le Xe siècle chez les Arabes Maghrebins de l'Afrique et de l'Espagne, qui gardèrent le zéro circulaire 34), tandis que les Arabes orientaux, ayant donné à leur 5 une forme presque circulaire et trop semblable à celle du zéro indien, remplacèrent celui-ci par un simple point, dont l'emploi avec la valeur du zéro n'était pas d'ailleurs sans exemple dans l'Inde même 35).

Connaissant fort peu les chiffres gobâr, et ne sachant pas même s'ils ont appartenu aux Arabes ou aux Juifs kabbalistes, M. Cantor (p. 161-162) est tenté de croire que leur ressemblance avec les chiffres

---

23) Voyez M. Wœpcke, *Introd.* etc., p. 27. Comparez *Propag.* etc., p. 193. — 24) Voyez M. A. Bœckh, Programme de l'Université de Berlin, semestre d'été de 1841, p. IX. Comparez M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 194-194. — 25) Figure 45. Comparez les figures données par les textes arabes de M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 32-43, et celles de M. Pihan, p. 208. — 26) *Journal asiatique* de Paris, sept. et oct. 1854, p. 356, et *Propag.* etc., note 1 de la p. 63, et p. 182-183. Comparez les textes arabes (*Propag.*, p. 32-43), qui n'établissent entre la notation indienne et la notation gobâr aucune différence de méthode. — 27) Comme exemple des chiffres *indiens* avec un certain nombre de zéros placés audessus de chaque chiffre pour en marquer l'ordre décimal, M. Wœpcke cite une scolie du moine byzantin Néophytus, auquel M. Cantor (p. 262) n'aurait pas dû attribuer l'emploi des chiffres *gobâr*. Voyez M. Wœpcke, *Propag.* etc., note de la p. 63 et p. 193-194. Comparez M. Cantor, note 497, p. 418. — 28) *Propag.* etc., p. 149-160 et p. 183-184. — 29) Voyez les chiffres *indo-arabes* mis à côté des chiffres *gobâr* dans un texte arabe publié par M. Wœpcke (*Propag.* etc., p. 37), ou bien la planche de M. Wœpcke (p. 40), ou bien encore les tableaux de M. Pihan, p. 207, et p. 208-209. — 30) M. Cantor (chap. XVI et XVII, p. 248 et 261) remarque seulement la grande ressemblance des chiffres gobâr avec les chiffres de Boèce. — 31) Traduction latine antique, sous le titre: *Algoritmi, de numero Indorum*, publiée par M. le prince Boncompagni, *Trattati d'aritmetica*, I, p. 1, l. 25, p. 2, l. 8. — 32) Voyez M. Wœpcke, *Introd. de l'arithm. ind.* p. 55-56; *Propag.* etc., p. 30-32 et p. 181; *Journal asiatique*, oct et nov. 1864, p. 359. — 33) *Propag.* etc., p. 58-60, et p. 181-183. — 34) Voyez M. Pihan, *Exposé* etc., p. 209. — 35) Voyez M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 151-154.

pythagoriques de Boèce vient de ce que les uns et les autres avaient été tirés d'un alphabet persico-babylonien, savoir: les chiffres pythagoriques par des grecs pythagoriciens d'une époque assez ancienne, et les chiffres gobâr probablement par des kabbalistes juifs. Après ce qui vient d'être dit, cette hypothèse n'a pas besoin de réfutation, et je pense que personne ne sera tenté de perdre son temps à la recherche de ce fabuleux alphabet persico-babylonien, dans lequel les neuf chiffres de Boèce et les neuf chiffres gobâr figureraient comme lettres.

Remarquant que tous les neuf chiffres gobâr ressemblent à tous les neuf chiffres pythagoriques de Boèce tandisqu'ils ne ressemblent qu'à ceux des chiffres indiens qui ont avec les chiffres de Boèce la même ressemblance, M. Wœpcke 36) n'hésite pas à déclarer que les chiffres gobâr sont les chiffres pythagoriques de l'abacus, empruntés par les Arabes occidentaux. En effet, pour des raisons que j'avais données 37) et que M. Wœpcke répète en me citant 38), l'usage de ces chiffres des Néopythagoriciens s'était peu répandu chez les Grecs, qui avaient une lettre numérale pour exprimer chaque nombre d'unités simples et d'unités d'ordres décimaux supérieurs; mais l'usage de ces neuf chiffres s'était répandu plus facilement, surtout depuis Boèce, chez les populations de l'occident romain, qui, ayant un système de notation numérale plus incommode que celui des Grecs, avaient avantage à accepter les neuf chiffres pour les calculs à faire sur l'abacus. Les Arabes occidentaux purent donc avoir ainsi de bonne heure les neuf chiffres, sans valeur de position en dehors de l'abacus, et sans zéro. Puis, vers le Xe siècle, initiés enfin à l'usage indien du zéro et de la valeur de position des chiffres en dehors de l'abacus, les Arabes occidentaux auraient abandonné l'abacus comme désormais inutile; ils auraient adopté la plus ancienne forme du zéro indien et indo-arabe, c'est-à-dire la forme circulaire; mais ils auraient gardé les chiffres de Boèce légèrement modifiés, et ils s'en seraient servis, sans *abacus*, pour les opérations du calcul indien, tout en gardant pour d'autres usages leurs lettres numérales; ils auraient donné a ces chiffres le nom de *gobâr*, qui signifie *poussière*, parcequ'au lieu de les tracer sur les *apices* destinés à être placés dans les colonnes de l'abacus, ils les écrivaient simplement avec le doigt sur un tableau couvert de poussière, soit que cet usage leur vint des Indiens, comme M. Wœpcke parait le croire 39), soit que les Arabes eussent déjà trouvé cet usage chez les peuples chrétiens de l'occident, comme il en reconnait la possibilité 40), et comme c'est très probable d'après le témoignage de Jamblique sur l'antiquité de cet usage chez les Grecs 41).

A cette hypothèse si plausible M. Wœpcke a le tort d'en ajouter une autre inadmissible, pour expliquer l'origine des chiffres pythagoriques. Suivant lui, ces chiffres seraient les neuf chiffres indiens du IIe siècle de notre ère, transmis de l'Inde aux néopythagoriciens d'Alexandrie, mais sans la manière de les employer avec le zéro et avec la valeur de position hors de l'abacus. J'ai déjà combattu (chapitre IV) cette hypothèse: j'ai montré qu'elle s'appuie sur des rapprochements peu fondés, et surtout qu'elle est renversée par un fait que M. Wœpcke parait n'avoir pas remarqué et que M. Cantor (chap. XVI, p. 239) et M. Pihan (p. 41) ont constaté après moi, mais sans en tirer aucun parti. Ce fait, le voici.

Bien des siècles avant le IIe de notre ère, dès une haute antiquité, en Egypte, dans la notation hiératique des jours du mois, il n'y avait que cinq chiffres simples pour les nombres ordinaux audessous de 10, savoir ceux qui représentaient les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, les quatre autres nombres s'exprimant par la réunion de deux des quatre premiers chiffres. Or ces cinq chiffres hiératiques des Egyptiens étaient identiques pour la valeur numérale et très semblables pour la forme aux chiffres pythagoriques de Boèce, aux chiffres gobâr, aux chiffres indo-arabes et aux nôtres pour les cinq mêmes nombres 1, 2, 3, 4 et 9. Parmi les nombres audessous de 10, les quatre qui n'avaient pas de signes spéciaux et simples dans cette

---

36) *Introd.* etc., p. 55; *Propag.* etc., p. 31, p. 58-61, et p. 194. — 37) *Mém. sur les orig. de notre syst. de num. écr.*, VII, p. 43. — 38) *Propag.* etc., p. 54. — 39) *Propag.* etc. p. 59-60, p. 66-67, et p. 182-183. — 40) *Propag.* etc., p. 183, note 1. — 41) Voyez ci-dessus, chapitre X.

vieille notation hiératique ordinale des Egyptiens, c'est-à-dire les nombres 5, 6, 7 et 8, sont précisément ceux pour lesquels les chiffres indiens offraient beaucoup de différences de forme au X[e] siècle suivant le témoignage d'Albirouni 42), et pour lesquels il y a différence complète entre les chiffres indiens et indo-arabes d'une part, et les chiffres pythagoriques, gubâr et européens modernes d'autre part. Ces faits si concordants ne peuvent pas être dûs au hasard, et toute hypothèse qui ne peut pas se concilier avec eux est par cela même condamnée. Or tel est le sort de l'hypothèse de M. Wœpcke, qui fait venir de l'Inde à Alexandrie au II[e] siècle de notre ère ces neuf chiffres dont cinq étaient si antiques en Egypte.

Y a-t-il une hypothèse qui satisfasse à ces faits et en même temps à tous les autres faits bien constatés? Je le crois, et je vais la soumettre à l'examen des savants. Elle se résume dans les propositions suivantes, dont les unes sont certaines, dont les autres, prises isolément, me semblent au moins probables, et dont l'ensemble me paraît offrir un haut degré de probabilité.

1°. Suivant une supposition vraisemblable, que j'avais déjà émise 43) en 1857, les populations couchites, répandues primitivement en Ethiopie, dans le Sud de l'Arabie et sur les côtes méridionales de l'Asie jusqu'au delà des bouches du Gange 44), avaient une notation numérale analogue à celle des anciens Egyptiens. Pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, ces populations avaient des chiffres à peu près semblables aux chiffres antiques de l'Egypte pour ces mêmes nombres, chiffres qui se conservèrent dans la notation hiératique ordinale des Egyptiens pour les jours du mois, et chez ces peuples, de même que dans cette notation égyptienne, les nombres 5, 6, 7 et 8 s'exprimaient par la juxtaposition de deux des quatre premiers chiffres.

2°. C'est à cette vieille notation hiératique des Egyptiens pour les jours du mois, que les Néopythagoriciens d'Alexandrie ont emprunté ces cinq chiffres pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, en les modifiant un peu et en donnant à leurs formes des interprétations symboliques. Ils y ajoutèrent, pour les nombres 5, 6, 7 et 8, quatre autres chiffres, dont les figures, probablement empruntées, avec des modifications, à des alphabets sémitiques, furent adaptées de même à leur symbolisme. Ensuite, à l'ancien *abacus* à rainures, où les nombres se marquaient avec des jetons ou avec des fiches mobiles, ils substituèrent un *abacus* dont les colonnes, tracées en couleur ou dans la poussière sur une surface plane, recevaient les neuf chiffres écrits sur des pièces mobiles nommés *apices*, et ces chiffres prenaient une valeur de position suivant la colonne où on les posait.

3°. Cet *abacus* des Néopythagoriciens, avec ses apices et ses neuf chiffres, trouva faveur surtout chez les peuples latins, auxquels il fut transmis par Archytas le jeune et recommandé par Boèce. En effet, cette invention des neuf chiffres était plus utile pour les latins, parce qu'ils n'avaient pas, comme les Grecs, une seule lettre pour exprimer chacun des neuf nombres d'unités de chaque ordre décimal. L'usage de cet abacus se perpétua chez les peuples de langue latine au moyen-âge. Mais on supprima les *apices*, et on écrivit directement les neuf chiffres dans les colonnes d'un abacus tracé sur un tableau ou sur du papier.

4°. D'un autre côté, peut-être dès avant de posséder une écriture alphabétique, les Indiens avaient probablement emprunté aux restes des populations couchites que leurs ancêtres avaient trouvées autrefois sur le sol de l'Inde en s'y établissant, le système de cinq chiffres peu différents de ceux de la notation hiératique ordinale des Egyptiens pour les jours du mois. Mais, au lieu d'exprimer par deux chiffres les nombres 5, 6, 7 et 8, ils imaginèrent pour ces nombres quatre chiffres entièrement étrangers par leurs figures au système couchite et égyptien, à celui des néopythagoriciens d'Alexandrie, au système gobâr

---

42) Voyez M. Wœpcke, *Propag. etc.*, p. 119-130. — 43) *Rech. nouv. sur les orig. de notre syst. de num. écr.*, VIII, p. 56. — 44) Voyez la *Genèse*, X, 6-20. Comparez M. Lenormant, *Cours d'histoire ancienne*, chap. VI (Paris, 1838, in-8.); M. d'Eckstein, *les Ethiopiens de l'Asie (Athenæum français*, III[e] année (1854), p. 364-368, et *Questions relatives aux antiquités des peuples sémitiques (Revue archéol.*, XII[e] année, p. 378-380, 563, 566 et 568), et M. Renan, *Hist. génér. des langues sémitiques*, I, 2, § 1 et 3, p. 32-33 et p. 53-54 (1[e] éd.).

et au nôtre. Très adonnés aux calculs numériques, les Indiens avaient depuis longtemps une notation très nette de la distinction des différents ordres décimaux d'unités: ils comprirent la possibilité et l'utilité d'exprimer tous les nombres avec leurs neuf chiffres et avec le zéro, imaginé par eux pour marquer les places vides dans les différents ordres décimaux. A une époque inconnue, mais certainement antérieure au Ve siècle de notre ère, ils arrivèrent ainsi à un système très préférable à celui de l'abacus des pythagoriciens.

5°. Les Arabes mahométans empruntèrent d'abord les notations numérales des peuples conquis; par exemple, les Arabes orientaux prirent ici les lettres coptes de l'Egypte, là les lettres numérales grecques restées en usage sous les Romains et les Byzantins dans l'ancien empire des Séleucides, sans valeur de position. Plus tard ils employèrent de même les lettres de leur alphabet *coufique*, puis celles de leur alphabet *nisky*, puis concurremment leurs abréviations *dîwâni*, que les Persans et les Turcs imitèrent par leurs abréviations *siyâk*. Chez les Arabes d'orient, les notations numérales alphabétiques restèrent toujours dominantes. Cependant, dès le milieu du VIIIe siècle, ils avaient connu les sciences indiennes, et, dès la première moitié du IXe siècle au plus tard, ils avaient connu et adopté, mais pour des usages assez restreints, les neuf chiffres indiens, qu'ils employèrent tantôt à la manière indienne avec le zéro et la valeur de position, tantôt en marquant l'ordre décimal de chaque chiffre par des zéros ou des points placés audessus. Ils transmirent aux Grecs byzantins leurs chiffres indo-arabes avec ces deux manières de les employer. Cependant ils connurent aussi de bonne heure et ils employèrent, avec de très légères différences de forme, les chiffres gobâr venus de l'occident.

6°. Les Arabes occidentaux n'acceptèrent probablement pas la notation numérale alphabétique des Romains, si incommode pour les calculs. Quand ils eurent leur alphabet *meghrebin*, ils en firent le même usage numéral que les Arabes orientaux faisaient de leur alphabet *nisky*. Mais ils connurent sans doute de bonne heure l'abacus pythagorique des Latins, avec ses colonnes tracées en couleur ou dans la poussière, et avec ses *apices* portant chacun un des neuf chiffres pythagoriques, dont cinq ressemblaient à cinq chiffres ordinaux hiératiques des Egyptiens, et par conséquent aussi aux cinq chiffres indiens correspondants. Plus tard, vers le Xe siècle, initiés aux sciences des Arabes orientaux, ils leur empruntèrent leurs deux méthodes de notation numérale avec neuf chiffres, l'une indienne avec le zéro et la valeur de position, l'autre arabe avec les points ou les zéros audessus de chaque chiffre pour en marquer l'ordre décimal. Mais, au lieu de prendre les chiffres indiens des Arabes orientaux, ils gardèrent et ils adaptèrent à ces deux procédés leurs neuf chiffres, qui étaient les neuf chiffres pythagoriques légèrement modifiés, et comme ils prirent l'usage grec et indo-arabe de faire les calculs sur un tableau couvert de poussière, ils donnèrent à leur méthode de notation et à leurs chiffres le nom de *gobâr*, qui signifie *poussière*.

7°. Depuis le commencement du XIIe siècle, chez les peuples chrétiens de l'occident, le terrain fut disputé aux *abacistes*, disciples des imitateurs de Boèce, par les disciples de la métode indo-arabe de notation numérale avec zéro et valeur de position. Mais l'imitation des chiffres *gobâr meghrebins* dans l'écriture cursive amena la transition des chiffres des manuscrits de Boèce à nos chiffres modernes.

8°. Ainsi les Néopythagoriciens d'Alexandrie avaient emprunté cinq de leurs neuf chiffres à l'Egypte, et nos chiffres modernes sont les chiffres des néopythagoriciens, mais altérés d'abord par des transcriptions successives, puis assimilés notablement aux chiffres gobâr, qui étaient ces mêmes chiffres pythagoriques un peu modifiés par les Arabes occidentaux. Nos neuf chiffres ne sont donc ni *arabes*, ni *indiens* ou *indo-arabes*, comme on l'a tant répété: ils sont *égypto-alexandrins*, avec quelque *influence maghrebine*. Si cinq d'entre eux ressemblent aux cinq chiffres indo-arabes correspondants, c'est parceque ceux-ci avaient, avec les cinq chiffres égyptiens correspondants, une ressemblance qui tenait à une très antique communauté d'origine.

9°. Ce qui est *indien* ou *indo-arabe*, et bien plus important que les figures arbitraires des neuf chiffres, dans notre notation numérale moderne, c'est le *zéro* et la méthode pour écrire tous les nombres avec les *neuf chiffres et le zéro, sans abacus à colonnes*. Mais, entre la notation numérale alphabétique

des Romains et notre notation moderne, la *méthode néopythagorique de l'abacus à colonnes, avec neuf chiffres et valeur de position*, avait été un intermédiaire d'une importance capitale, et dont l'introduction en occident avait constitué un grand progrès, par rapport à l'*ancien abacus à jetons et sans chiffres*, sur lequel la *valeur de position* existait, mais chaque jeton ne représentait qu'une unité de chaque ordre décimal.

XVIII. Art du calcul chez les Arabes. [1]

Après nous être laissé entraîner, à la suite de M. Wœpcke, dans des questions graves que M. Cantor avait à peine effleurées, revenons à ce dernier savant, pour ne plus le quitter que bien peu jusqu'à la fin de son livre. Dans son plan un peu vague, l'histoire de l'arithmétique se mêlant à celle des systèmes de numération, M. Cantor n'en a pas fini avec les Arabes. Au commencement de ce chapitre, il rappelle qu'à Bagdad, à la fin du VIII[e] siècle et au IX[e], sous le calife Almanser et sous ses successeurs, des Indiens apportèrent aux conquérants arabes des notions et des livres surtout astronomiques, tandisque des médecins nestoriens les initièrent aux connaissances de l'occident, et que dès lors des ouvrages grecs furent traduits en arabe. Il fait ressortir l'intérêt que les relations du calife Haroun-al-Rachid avec Charlemagne présentent pour l'histoire de l'astronomie et de la mécanique. Il mentionne la fondation de l'académie de Bagdad et des écoles de Coufa et de Bassora sous Almamoun, et les traductions d'ouvrages indiens, puis des principaux ouvrages grecs sur les mathématiques et l'astronomie, faites au IX[e] siècle sous ce même calife.

M. Cantor revient en passant 2), et d'une manière malheureuse, sur une question qui appartient au chapitre précédent, mais qu'il n'y avait qu'effleurée. Pour savoir si les *chiffres* nommés *indiens* par les Arabes orientaux venaient réellement de l'Inde, il les compare avec des chiffres indiens modernes 3) et avec des chiffres indiens des trois premiers siècles de notre ère, pour lesquels il adopte les fausses évaluations de M. Prinsep 4). De la différence observée, il croit pouvoir conclure que les *chiffres* dits *indiens* par les Arabes de Bagdad, au lieu de venir de l'Inde, avaient été empruntés aux Néopythagoriciens d'Alexandrie. Il ignore que l'origine vraiment indienne de ces chiffres est confirmée par la ressemblance que M. Wœpcke 5) a constatée entre des *chiffres indo-arabes* du X[e] siècle 6) et les *chiffres dévanagaris* des Indiens de la même époque 7); tandisque, comme nous l'avons montré (chapitre XVII), les *chiffres pythagoriques* des derniers temps de l'Ecole d'Alexandrie, inconnus à tous les grands mathématiciens grecs, et propagés surtout chez les Latins avec l'abacus à colonnes tracées en couleur ou sur la poussière, devinrent les *chiffres gobâr* des Arabes occidentaux, très différents des *chiffres indiens* et *indo-arabes* pour les nombres 5, 6, 7 et 8.

Ensuite M. Cantor aborde l'objet principal de ce chapitre, c'est-à-dire les méthodes arabes de calcul. Il regrette de n'avoir à sa disposition que trois grands documents, mais heureusement choisis par le hasard pour faire connaître l'état de l'arithmétique au IX[e] siècle à Bagdad, au XII[e] siècle chez les Arabes et chez les Juifs d'Espagne, et au XVI[e] chez les Musulmans orientaux.

1°. Le premier de ces documents, l'*Arithmétique* de Mohammed ben Mousa *Alkharizmi* (c'est-à-dire né dans la province de Kharizm ou Khowarezm à l'est de la mer Caspienne), est le traité le plus connu et

---

1) *Arabische Rechenkunst*, p. 267-275. — 2) Chap. XVII, p. 260-261, et chap. XVIII, p. 265-266 et p. 270. — 3) Figure 50, et figures 21 et 22 de M. Cantor. — 4) Figure 50, et figure 23, ligne 3, de M. Cantor. Comparez le tableau de M. Pihan, p. 63, et ce que j'ai dit ci-dessus (chapitre IV) sur les chiffres indiens de M. Prinsep, comparés à ceux de MM. Thomas et Stevenson. — 5) *Propag.* etc., p. 149-150. — 6) Manuscrits arabe N. 952 du supplément Arabe de la Bibliothèque impériale de Paris. Comparez M. Wœpcke, *Rech. sur les ouvrages de Léonard de Pise*, 1[e] Partie, *Extraits et traductions d'ouvrages arabes inédits* III, p. 8 et 26 du tirage à part (Rome, 1861, gr. in-4.). Extrait des *Atti dell' Accad. pont. dei nuovi Lincei*, t. 14, janvier 1861. — 7) *Journal de la société asiatique du Bengale*, avril 1838, planche XX, en regard de la p. 348.

le plus clair sur la méthode indienne, et ce traité est resté le modèle des traités de calcul chez les Arabes et chez les Européens pendant l'influence arabe. Le mot *algoritmus*, qui désignait dans le latin du moyen-âge, l'*arithmétique de position*, mot pour lequel on inventa dès le XIIIe siècle des étymologies aussi nombreuses que bizarres 8), est résulté d'une altération du mot *Alkarizmi*, surnom qui marquait la patrie de cet arithméticien par excellence, et qui servait à le distinguer de l'algébriste Mohammed ben Mousa ben Shaker 9). Cette étymologie, trouvée par M. Reinaud et vainement contestée, a reçu, comme le dit M. Cantor, une confirmation éclatante, quand M. le prince Boncompagni a découvert et publiée 10) un ouvrage latin qui, au jugement de M. Chasles, doit être une traduction littérale plutôt qu'une imitation de l'*Arithmétique* de Mohammed ben Mousa, et dont le rédacteur est probablement Adelart de Bath, moine anglais du commencement du XIIe siècle. En tête de chaque article de cette *Arithmétique*, on lit: *Algoritmi* a dit. Or il est vrai qu'Albirouni était aussi surnommé Alkharizmi; mais il n'avait pas écrit sur l'algèbre, et l'auteur du traité traduit renvoie à son *Algèbre*. C'est donc bien Mohammed ben Mousa.

Après des invocations d'un caractère vraiment arabe au *Directeur de toutes choses*, Alkharizmi enseigne la manière indienne d'exprimer tous les nombres, grands ou petits, par neuf signes, sur les figures de quatre desquels, savoir, du 5, du 6, du 7 et du 8, *les hommes*, dit-il, *ne sont pas d'accord*. Albirouni dit que ces variétés de forme pour ces quatre chiffres existent *chez les Indiens*. M. Cantor (p.270) pense que le premier a voulu signaler un désaccord existant entre les Indiens et d'autres peuples pour les figures de ces quatre chiffres. Cette interprétation, qui me paraît être aussi celle de M. Wœpcke 11), est conforme au sens naturel des expressions d'Alkharizmi; mais M. Cantor n'aurait pas dû contester l'assertion d'Albirouni sur les variantes de ces quatre mêmes chiffres chez les Indiens 12), et il se trompe certainement, quand il prétend que les Arabes de Bagdad avaient emprunté aux Indiens la méthode seulement, et non les figures des chiffres. Le texte d'Alkharizmi me paraît indiquer, au contraire, que de son temps, tout en employant à Bagdad les *chiffres indiens*, on y connaissait aussi les *chiffres gobâr orientaux* 13). En effet, nous avons vu qu'entre les *chiffres indiens* des Arabes et leurs *chiffres gobâr*, la différence portait principalement sur les chiffres 5, 6, 7 et 8, et que cette différence s'explique, parceque les chiffres gobâr viennent des chiffres pythagoriques, tandisque les chiffres indo-arabes viennent bien réellement de l'Inde, quoique M. Cantor en puisse dire 14).

Mohammed ben Mousa Alkharizmi 15) dit que les neuf signes peuvent se trouver à diverses places, nommées *différences*, et que, si une *différence* reste vide, on y met un *petit cercle*, pour montrer qu'aucun nombre ne s'y trouve. Evidemment le mot *différence* signifie ici l'*ordre décimal*, et le *petit cercle* est le *zéro*.

La suite de l'*Arithmétique* d'Alkharizmi donne, pour l'addition et pour la soustraction, quelques règles, dont voici le résumé. Dans l'addition, si la somme des chiffres occupant une même *différence*, c'est-à-dire un même *ordre décimal*, donne un nombre supérieur à 9, on écrit à ce même ordre le chiffre exprimant le reste de la division par 10; si ce reste est nul, on met un petit cercle, c'est-à-dire un zéro, pour que l'ordre ne reste pas vide; le nombre des dixaines s'ajoute à l'ordre supérieur. Pour l'addition, Alkharizmi (p. 8) procède, comme nous, de droite à gauche en commençant par les unités simples. Mais, arrivant à la soustraction (p. 8-10), il conseille de procéder plutôt de gauche à droite en commençant par l'ordre décimal le plus élevé, et il dit (p. 9) qu'il vaut mieux procéder de même dans l'addition,

8) Voyez M. Cantor, p. 266-268. — 9) Contre cette confusion, commise aussi par Bailly et par Andres, voyez Cossali, *Lezione III sull'Aritmetica (Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni*, p. 332-334. Roma, 1857, gr. in-4). — 10) *Trattati d'Aritmetica*, I, p. 1-23 (Roma, 1857, gr. in-8), — 11) *Propag.* etc., p. 149-150. — 12) Voyez le chapitre précédent. — 13) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 14) Il est vrai, comme le dit M. Cantor (p. 270), que la position donnée par le traité d'Alkharizmi (p. 2) à l'unité *en dehors des nombres* repose sur une idée pythagorique, adoptée par les Juifs kabbalistes; mais, tout en accueillant cette idée occidentale, les Arabes de Bagdad ont pu adopter d'un autre côté les chiffres indiens, comme tant de preuves l'établissent. — 15) P. 8 et suiv. (éd. de M. le prince Boncompagni).

parceque c'est plus commode pour ces deux opérations. En ce qui concerne la soustraction, il mentionne (p. 8) le cas où, pour pouvoir faire une soustraction partielle, on est obligé d'emprunter à l'ordre décimal supérieur une unité, qui vaut 10. Mais, dans ses exemples de soustractions commençant par la gauche (p. 1-10), il n'y a aucun emprunt à faire. Une troisième et une quatrième opération consistent à doubler un nombre ou bien à en prendre la moitié (p. 10). Suivent les règles détaillées de la multiplication (p. 10-12), avec celles de la *preuve par* 9 (p. 12-13), qui consiste à trouver, pour reste de la division par 9 du produit des deux facteurs, un nombre égal au reste de la division par 9 du produit des restes de la division par 9 de chacun des deux facteurs. Ensuite viennent les règles de la division (p. 13-17), telle que nous la pratiquons de nos jours. Il n'y a dans le traité d'Alkharizmi aucune trace de la méthode de Boèce, dont l'usage resta général en Europe jusqu'au XI[e] siècle, c'est-à-dire de la *division complémentaire* ou *division à l'aide des différences* 16). Celle-ci vient de quelque néopythagoricien grec, qui l'avait transmise à Archytas le jeune, à qui Boèce l'a empruntée. Celle de Mohammed ben Mousa, qui n'est arrivée par l'influence arabe, est originaire de l'Inde.

Je m'arrête ici, pour remarquer que M. Wœpcke 17) a signalé chez Alkharizmi et chez des auteurs arabes postérieurs l'application de la *preuve par* 9 aux duplations, aux multiplications et aux élévations des nombres au carré et au cube: la place tenue par cette preuve dans le calcul indien montre, au jugement de M. Wœpcke, qu'elle est d'origine indienne. Nous verrons (chapitre XX) que telle est aussi la pensée de M. Cantor.

A la fin de son traité (p. 17-23) Mohammed ben Mousa rattache à la division le calcul des fractions sexagésimales: il remarque que les Indiens divisaient l'unité en soixante minutes, la minute en soixante secondes, la seconde en soixante tierces, et ainsi de suite. Mais les Indiens eux-mêmes avaient pu emprunter ces fractions sexagésimales aux astronomes grecs alexandrins, comme le dit M. Cantor, ou bien ajouterai-je; aux Babyloniens, chez qui nous avons constaté (chapitre II) l'usage antique de ces mêmes fractions.

De cette analyse, M. Cantor conclut que Mohammed ben Mousa ignorait ou omettait la *division complémentaire* de Boèce. Pour déclarer que les Arabes l'ignoraient, il attend à avoir examiné les deux autres ouvrages, qui vont nous faire connaître ce que l'arithmétique était devenue au XII[e] siècle en Espagne et au XVI[e] en Orient.

M. Cantor rappelle les grandeurs des Ommiades en Espagne depuis le milieu du VIII[e] siècle et surtout au X[e], et les merveilles de leur architecture, qui supposait des connaissances mathématiques. En effet, M. Wœpcke 18) a publié en 1854 des extraits d'une algèbre rédigée en Espagne dans la seconde moitié du XV[e] siècle, mais d'après les écrits d'Ibn Albannâ, qui vivait vers 1200 et qui lui-même avait puisé dans des écrits antérieurs d'Arabes d'Espagne, et cette *algèbre* est très supérieure, pour la notation algébrique, aux autres traités du XV[e] siècle. D'un autre côté, on connaît la célèbre *algèbre* de Geber de Séville, contemporain d'Ibn Albannâ et considéré faussement comme ayant donné son nom à l'algèbre 19).

---

16) Voyez ci-dessus, chap. XV. — 17) *Propag.* etc, p. 163, note 4, et p. 167-172. — 18) *Journal Asiatique*, 1854, Série V, t. 4, p. 348-384. — 19) J'ajoute ici une explication que M. Cantor ne paraît pas avoir bien connue. Le mot *aljebr* est le premier des deux mots arabes *aljebr v'almukabalah*, qui expriment deux opérations nécessaires pour la simplification des équations. Le procédé nommé *aljebr (rétablissement)* consiste à ajouter aux termes positifs d'un des membres de l'équation des quantités respectivement égales aux termes négatifs semblables qu'on efface dans l'autre membre. Le procédé nommé *almukabalah (opposition)* consiste à soustraire des termes positifs d'un des deux membres de l'équation des quantités respectivement égales aux termes semblables positifs qu'on efface dans l'autre membre. L'*art majeur*, ou *art de la chose*, c'est-à-dire ce que nous nommons l'*algèbre*, embrassait la mise en équation, la simplification des équations et leur résolution. Mais les Arabes donnaient vulgairement à l'*art majeur* tout entier le nom des deux opérations de simplification, *aljebr v'almukabalah*. Voyez Cossali, *Memorie Storico-Scientifiche*, *Rifl.* XVII, p. 381-384 *(Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni)*.

2° Quant à l'arithmétique des Arabes d'Espagne, M. Cantor l'a étudiée dans le traité rédigé au XII. siècle par le juif Jean de Séville 20), qui, à la prière de Raimond, archevêque de Tolède, de concert avec le chrétien Gondisalvi, avait traduit d'abord en castillan, puis du castillan en latin, des livres arabes de philosophie. Le *Livre d'Algerismi sur la pratique de l'arithmétique, publié par maître Jean de Séville*, a été imprimé par les soins de M. le prince Boncompagni 21). M. Cantor soupçonne qu'il a passé de même par deux traductions, et que dans la rédaction latine beaucoup d'expressions du texte arabe ont été altérées et assimilées à celles des traités latins de l'époque sur le même sujet. Telles seraient, par exemple, les expressions *nombres digitaux* et *nombres articulaires*, expressions étrangères aux Arabes soit d'orient soit d'occident, mais empruntées sans doute à Boèce et substituées par les traducteurs aux expressions arabes *unités* et *dizaines*. D'autres fois, certains mots traduits littéralement de l'arabe ont dans le latin du temps une tout autre signification: par exemple, le mot *différence*, chez Jean de Séville comme chez Mohammed ben Mousa Alkharizmi, désigne l'ordre décimal de chaque chiffre, et n'a rien de commun avec les *différences* employées dans la *division complémentaire* de Boèce. Cette méthode de division est inconnue à Jean de Séville comme à Mohammed.

3° Elle l'est de même à Beha-Eddin, persan du XVIe siècle, dont l'opuscule sur l'*Essence du calcul* 22) représente les connaissances arithmétiques des orientaux à cette époque. M. Cantor regrette de ne l'avoir connu qu'après la rédaction des dix-sept premiers chapitres de son livre. Cependant ce qu'il en a vu, joint à la lecture des traités de Jean de Séville et de Mohammed ben Mousa Alkharizmi, a achevé de lui prouver qu'en Perse au XVIe siècle, comme en Espagne au XIIe et à Bagdad au IX., la *méthode complémentaire* pour la division est restée étrangère à l'arithmétique arabe en orient comme en occident.

Chez Jean de Séville, le zéro est encore nommé *petit cercle*, bien que la figure d'un simple point fût devenue prédominante chez les Arabes 23), et l'emploi du zéro est expliqué avec un peu plus de détails que chez Mohammed ben Mousa.

Jean de Séville et Beha-Eddin étendent la *preuve par* 9 à l'addition et à la soustraction. Mais, chez Jean de Séville 24), on trouve une innovation bien autrement importante, et à l'origine de laquelle M. Cantor regrette de n'avoir pas pu remonter. Après avoir enseigné l'extraction de la racine carrée avec *fractions* sexagésimales, à peu près comme le grec Théon dans son *Commentaire* sur Ptolémée, le juif espagnol disciple des Arabes ajoute l'extraction de la racine carrée avec *fractions décimales*, à peu près comme Jérôme Cardan, chez qui M. Cantor, avant de connaître le traité de Jean de Séville, avait cru en trouver la première trace. Ainsi, dès le XIIe siècle, l'emploi de l'arithmétique indienne de position avait conduit les Arabes à continuer la loi de position au-dessous de l'unité, et à comprendre l'avantage des fractions décimales ainsi notées.

XIX. Isidore, Bède, Alcuin. 1)

M. Cantor montre que les deux chapitres précédents, sur les chiffres et l'arithmétique des Arabes, se rattachent à l'étude des chiffres de Boèce et même à la question de l'antiquité des deux passages de sa *Géométrie* sur l'abacus et sur le calcul des fractions. En effet, ces deux chapitres prouvent que les procédés de calcul des Arabes (et M. Cantor aurait dû dire de plus: les chiffres indo-arabes eux-mêmes) sont autres que ceux de Boèce; que les méthodes sont différentes de part et d'autre par leurs principes

---

20) Jean de Séville, autrement nommé Jean Avendehut ou Jean David, florissait en Espagne de 1130 à 1150. Il est peut-être le même que David le Juif, mentionné par Albert le grand. Voyez M. Steinschneider, *Les ouvrages du prince Boncompagni concernant l'histoire des mathématiques*, p. 8 (Rome, 1850, in-4, 9 pages). — 21) *Trattati d'aritmetica*, II, p. 25-136. — 22) Traduction publiée par M. Nesselmann (Berlin, 1843). — 23) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 24) *Trattati d'aritmetica*, II, p. 97-90. — 1) *Isidor, Beda, Alcuin*, p. 270-291.

mêmes, et que la méthode de Boèce nécessite l'emploi de l'abacus, tandisque celle des Arabes n'en a pas besoin, à cause du zéro, qui se met dans les places vides. D'où M. Cantor conclut: 1°. que quiconque a été initié au calcul par les Arabes doit nécessairement leur avoir emprunté le zéro sous forme de cercle ou de point; 2°. que la *Géométrie* de Boèce dans sont entier, et spécialement les deux passages sur le calcul des nombres entiers et des fractions au moyen de l'abacus, ne peuvent pas être l'œuvre d'un mathématicien formé à l'école des Arabes, mais sont bien l'œuvre de Boèce, héritier, et vulgarisateur chez les Latins, de procédés arithmétiques imaginés à Alexandrie sous l'inspiration du néopythagorisme.

Déjà M. Cantor nous a signalé dans la *Géométrie* de Cassiodore et dans une lettre de Théodoric 2) des indications de l'influence scientifique que Boèce a exercée de son temps dans l'Europe occidentale. Le développement de cette influence se montre chez les écrivains occidentaux des siècles suivants.

M. Cantor interroge d'abord le saint évêque Isidore de Séville, postérieur d'un siècle à Boèce. Au commencement de ses *Origines*, Isidore, définit, comme Boèce et Cassiodore, les sept sciences dont se composent le *trivium* et le *quadrivium*. Dans son III° livre, l'arithmétique théorique tient la première place: il se réfère à Apulée et à Boèce. Après des étymologies étranges des noms de nombre latins, on retrouve dans ce III° livre quelques unes des considérations des Pythagoriciens, et de Boèce (abréviateur de Nicomaque), sur les propriétés générales des nombres. Quant à l'arithmétique pratique, c'est-à-dire à l'art du calcul, il n'en est pas question. La géométrie, la musique et l'astronomie d'Isidore de Séville, dans ce même livre des *Origines*, se réduisent à une maigre compilation de définitions.

Un siècle plus tard, écrivait le prêtre anglais Bède, moine et professeur sur la frontière d'Écosse, dans un cloître riche en livres de mathématiques: il y composa de nombreux ouvrages pendant la première moitié du VIII° siècle. Parmi ses œuvres authentiques, énumérées dans un catalogue dressé par lui quatre ans avant sa mort, il y a un traité de chronologie, auquel appartiennent, comme premier et quatrième chapitres, deux opuscules souvent considérés comme isolés, l'un *sur le calcul par les doigts*, l'autre *sur le calcul par onces*, c'est-à-dire par douzièmes et subdivisions plus petites d'une unité quelconque. Dans le premier opuscule, il décrit une manière d'exprimer les nombres par la position des doigts, et il déclare que certaines allusions de saint Jérôme prouvent qu'il connaissait cette méthode. Dans l'autre opuscule, en exposant la division de l'*as* ou unité en fractions composées chacune d'un certain nombre d'*onces* ou douzièmes, et la division de l'once elle-même en fractions, Bède annonce qu'il va donner à la fois les noms et les signes de toutes ces fractions. Ces signes, qui ont été omis à tort dans la bonne édition de Giles 3), mais qui se trouvent dans les éditions antérieures, sont presque tous identiques à ceux que M. Cantor à découverts dans un manuscrit de Berne, et à ceux que M. Halliwell a trouvés dans un manuscrit d'Angleterre. Mais ces 18 signes de Bède, dont 12 représentent des fractions de l'*as*, et dont 6 représentent des fractions de l'*once*, ne peuvent pas avoir été, comme M. Cantor le suppose, identiques aux 10 signes pythagoriques des fractions de l'*once*, donnés dans un ouvrage latin du grec Archytas, et que Boèce a remplacés par les dix premières lettres de l'alphabet latin 4). Car nous avons prouvé que les deux systèmes de fractions sont très différents indépendamment des signes, que celui d'Archytas et de Boèce est un système grec arrangé par les néopythagoriciens, mais que celui de Bède est le vieux système romain complet de Volusius Mæcianus, sur lequel l'autorité de Boèce n'a pas fait prévaloir celui d'Archytas. Cependant il est possible que l'ouvrage suivi par Bède ait contenu la série des neuf chiffres donnés par Boèce pour les nombres de 1 à 9; car Bède a pu omettre volontairement cette série des neuf chiffres, comme Boèce avait omis la série des signes pour les fractions. Quoi qu'il en soit, M. Cantor dit que le chiffre 4 de Boèce ressemble beaucoup au signe que Bède donne pour 4 onces. Cette ressemblance est réelle; seulement M. Cantor aurait dû remarquer qu'elle concerne une forme fautive donnée au 4 de Boèce sur la figure de l'abacus, altérée par les copistes, mais non la forme

2) Voyez ci-dessus, chapitre XIII, notes 2 et 10. — 3) Londres, 1843, 12 volumes in-8. — 4) Voyez ci-dessus, chapitre XV.

vraie, donnée dans le texte authentique des manuscrits. Parmi les 18 signes de Bède pour les fractions, quelques uns seulement ressemblent à ceux de Volusius Mæcianus pour ces mêmes fractions romaines, mais aucun ne ressemble à la forme authentique d'un des 9 chiffres pythagoriques de Boèce.

Quant à un traité *Sur l'abacus*, imprimé dans les œuvres de Bède, M. Cantor avoue qu'il est de Gerbert. Mais il promet de montrer, dans le chapitre XX, que probablement Bède connaissait l'*abacus* de Boèce et en avait décrit l'usage à ses élèves. Nous verrons que malheureusement M. Cantor s'appuiera sur une fausse interprétation d'un texte d'Odon de Cluny. Ici M. Cantor ajoute que Bède aurait pu lire la théorie de l'abacus chez son auteur nommé Victorius et dont M. Chasles 5) a trouvé le nom cité par des abacistes postérieurs à Gerbert. M. Cantor pense que ce Victorius doit être celui qui fut chargé par le pape saint Léon le Grand de fixer le comput pascal, quelques années avant la naissance de Boèce.

M. Cantor passe aux œuvres de l'anglo-saxon Alcuin, qui, né à York en 735, année de la mort de Bède, fut directeur de l'école d'York depuis 760 jusqu'à 781, propagateur de l'instruction dans les états de Charlemagne depuis cette dernière époque, et directeur de l'école de Saint Martin de Tours depuis 796 jusqu'à 804, date de sa mort. L'enseignement des éléments du calcul avait sa place dans les écoles, à côté de celui du comput ecclésiastique et des éléments de l'astronomie. Mais, quand on écrivait des livres, c'était plutôt sur ce qui dépassait cet enseignement élémentaire. Ainsi un ouvrage intitulé *Problèmes et solutions arithmétiques*, ouvrage imprimé dans les éditions de Bède et dans celles d'Alcuin, mais qui certainement n'est pas du premier et qui paraît être du dernier, résout des problèmes dont quelques uns sont analogues à ceux du grec Diophante, que peut-être Alcuin ne connaissait même pas; car, ayant à traiter un problème indéterminé, il ne donne qu'une des sept solutions possibles. Un de ces problèmes enseigne à faire la somme d'une progression arithmétique, d'après cette remarque, que l'addition de deux termes placés symétriquement à partir des deux extrémités de la progression donnent toujours la même somme. D'autres problèmes plus faciles supposent pourtant une main exercée à la multiplication et à la division, et quelques uns supposent la connaissance de certaines formules d'arpentage.

Cet ouvrage est attribué à Alcuin par un très ancien manuscrit de Reichenau. De plus, en faveur de cette attribution, M. Cantor cite un passage d'une lettre par laquelle Alcuin annonce à Charlemagne l'envoi de *quelques exemples de calculs subtils d'arithmétique*. Tel me paraît être le sens des mots: *aliquas figuras arithmeticæ subtilitatis*. M. Cantor traduit *figuras* par *essais (Proben)*: ce qui, sans traduire exactement le mot, ne s'écarte pas du sens général de la phrase. Mais ensuite il propose une autre explication, que je ne puis accepter, et d'après laquelle le mot *figuras* signifierait soit les neuf *chiffres*, soit la *figure de l'abacus*. Mais la figure unique de l'*abacus* ne comporte pas le pluriel *aliquas figuras*; le nombre précis de *neuf* chiffres ne comporte pas le mot vague *aliquas*, qui va bien à un recueil de problèmes plus ou moins nombreux; de même, le mot *subtilitatis* convient bien à des *problèmes*, et non à des *chiffres*.

Une découverte faite, il y a environ 17 ans, par M. Bethmann dans la bibliothèque capitulaire d'Ivrée 6) paraît à M. Cantor offrir une preuve de la connaissance qu'Alcuin aurait eue des neuf chiffres et des méthodes de calcul de Boèce. Un manuscrit in-folio du XI[e] siècle, écrit tout entier de la même main, et contenant l'ouvrage de Martianus Capella et les traités de saint Augustin et de Boèce sur la musique, a pour garde deux feuillets d'un autre parchemin, dont le premier porte une *Introduction à la division*, écrite par une main du X[e] siècle, et où deux vers nomment Flaccus et le Franc Aribert. Or, parmi les savants réunis autour de Charlemagne, Flaccus était le pseudonyme d'Alcuin, qui était connu sous ce nom, même en dehors de l'académie impériale. M. Bethmann dit que dans cet opuscule les *chiffres arabes* sont employés à côté des chiffres romains dans un même exemple. M. Cantor ne doute pas que M. Bethmann

5) *Geschichte der Geometrie*, p. 591, note 233, traduction allemande de M. Sohncke. — 6) Voyez les *Archives de la société pour l'histoire ancienne d'Allemagne*, recueil allemand publié par M. Pertz, t. 9, p. 623.

ne nomme ici *chiffres arabes* les neuf chiffres de Boèce, et il pense que, si M. Bethmann avait tenu sa promesse de faire mieux connaître cet opuscule, on verrait qu'il contient la méthode de Boèce pour la division, c'est-à-dire la *méthode complémentaire* ou *des différences*. Ainsi Alcuin aurait connu le calcul avec les neuf *signes pythagoriques* de Boèce sur un abacus tracé à la main 7).

Je dois dire qu'un autre renseignement, trop vague aussi, communiqué par M. Bethmann à l'académie de Berlin et signalé par M. Wœpcke 8), me semble ne pouvoir que difficilement se plier à la même interprétation: d'après certaines données, que M. Bethmann n'a pas précisées, Charlemagne aurait proposé aux personnes de sa cour des problèmes d'arithmétique fondés sur l'emploi des neuf chiffres *et du zéro*. Si les données de M. Bethmann étaient vraiment probantes en faveur de l'emploi des neuf chiffres, *avec le zéro*, et *sans abacus*, à la cour de Charlemagne, il faudrait dire que dès l'an 807 la célèbre ambassade du calife Haroun-al-Rachid aurait apporté en occident cette connaissance, à peine introduite alors à Bagdad même 9). Mais M. Bethmann devrait être moins prompt à lancer des assertions, ou moins lent à les justifier par des documents. En attendant les preuves, le plus sûr pour nous est de douter.

XX. Odon de Cluny. 1)

Sur Odon, abbé de Cluny au commencement du X[e] siècle, M. Cantor donne une notice beaucoup moins développée que celle de M. Hauréau 2), mais plus exacte et plus complète sur les points qui concernent spécialement l'histoire de mathématiques.

Dans le recueil de traités musicaux publié au XVIII[e] siècle par Martin Gerbert, abbé de Saint Blaise en Autriche, se trouvent plusieurs écrits dont l'auteur est nommé Odon. M. Cantor me félicite de les avoir signalés le premier à l'attention des historiens des mathématiques, et d'avoir soutenu qu'ils devaient être tous de l'abbé de Cluny. Le premier, *sur la série des tons, et leurs différences*, est tiré d'un manuscrit du XI[e] siècle, qui appartenait à l'abbaye de Monteassin, où Odon de Cluny avait résidé quelque temps. Le second traité est un *Dialogue sur la musique* 3), dont l'auteur est nommé expressément *Odon de Cluny* par un anonyme du XIII[e] siècle, de Melk en Autriche. Le troisième est un traité plus étendu *Sur la Musique*, attribué à *Odon* dans le manuscrit de saint Blaise qui a servi à l'éditeur, mais donné à Bernon, prédécesseur d'Odon, par un manuscrit de Leipzig cité par M. Cantor. Le quatrième traité, dans lequel Boèce est cité, est intitulé *Règles de l'Arithmomachie*. Ce nom grec est celui d'un petit jeu arithmétique 4), dont l'origine remonte probablement jusqu'aux pythagoriciens grecs 5). Enfin, le cinquième traité est intitulé *Règles sur l'abacus*.

Admettant, malgré les doutes de l'éditeur Martin Gerbert, qu'Odon, auteur du *Dialogue sur la Musique* était bien Odon, abbé de Cluny au X[e] siècle 6), j'en avais conclu que vraisemblablement les autres

---

7) En faveur de cette pensée, M. Cantor avait cru trouver une autre preuve dans la découverte des neuf chiffres, faite par M. Pertz au feuillet 50 d'un manuscrit de la Bibliothèque de la ville de Zurich, manuscrit du X[e] siècle, qui contient, entre autres matières très diverses, une *Vie de Charlemagne*, probablement par Angilbert. Mais, ayant vu lui-même ce manuscrit, trop brièvement décrit par M. Pertz, M. Cantor a constaté que les neuf chiffres s'y trouvent tout-à-fait isolés sur le feuillet 50, et que ces chiffres y sont d'une main très postérieure à celle qui a écrit le reste du manuscrit. — 8) *Propag.* etc., p. 117, note 2. — 9) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 1) *Odo von Cluny*, p. 292-302. — 2) Dans la *Nouvelle Biographie universelle*, t. 38, p. 187-190 (Paris, 1862) — 3) M. Hauréau n'a connu que ce second opuscule d'Odon sur la musique, et l'a cru inédit. — 4) Comparez Lefèvre d'Etaples, *Rithmimachie ludus, qui et pugna numerorum appellatur*, à la fin d'un recueil qui contient: 1°. l'*Arithmétique* de Jordanus Nemorarius, 2°. La *Musique* de Lefèvre d'Etaples, 3°. Son *Abrégé de l'Arithmétique de Boèce*, 4°. Son *Arithmomachie* avec la figure (Paris, 1496, in-folio). M. Cantor dit qu'un traité sur le même sujet se trouve dans un manuscrit de Berne. — 5) Voyez mon Mémoire *Sur le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon*, p. 16-17 (Extrait de la *Revue archéol.*, XIII[e] année). — 6) M. Hauréau, dans l'article cité, suppose que ce doit être un autre Odon, parceque dans la Préface (manuscrit latin 7211 de Paris) on voit que l'auteur l'écrivait dans un monastère placé sous l'invocation de la Sainte Vierge, et parceque dans l'ouvrage même (manuscrits latins 7211 et 7369 de Paris) Odon de Cluny se trouve cité. Mais, outre qu'il pourrait y avoir une interpo-

traités, et spécialement le traité des *Règles sur l'abacus*, contenu avec le *Dialogue* dans un manuscrit de Vienne du XIII[e] siècle, devaient être du même auteur. M. Cantor pense que cette conclusion avait besoin de motifs plus sûrs: il les a cherchés dans l'étude du traité des *Règles sur l'abacus*, étude que je n'avais pu faire, n'ayant ni l'édition donnée par Martin Gerbert, ni un manuscrit de cet opuscule, qui ne m'était connu, comme les quatre autres, que par des notices insuffisantes.

L'*Introduction* de cet opuscule 7) est reproduite dans la note 563 de M. Cantor, et traduite en allemand dans le texte de son chapitre XX. S'appuyant sur les expressions de cette Introduction, M. Cantor essaie d'établir les deux points suivants, dont nous allons examiner les preuves.

1°. Du temps de l'auteur, dit M. Cantor, *des livres de Bède le Vénérable sur l'art du calcul (de computo)* étaient en usage. D'où il conclut que Bède avait traité du *calcul sur l'abacus*, et que, ce traité s'étant perdu sans que le souvenir s'en fût effacé, les copistes l'avaient remplacé par celui de Gerbert. Ainsi s'expliquerait, suivant M. Cantor, la présence de ce dernier traité parmi les œuvres de Bède. Cette induction ingénieuse a le malheur de s'appuyer sur un contresens. En effet, voici ce que dit Odon : *Si quelqu'un désire avoir la connaissance de l'abacus, il est nécessaire qu'il étudie la théorie des nombres. Cet art* (celui de l'abacus) *a été inventé par Pythagore*. Sans ce même art, *on peut à peine atteindre la perfection du CALCUL (calculationis)*, c'est-à-dire (par exemple) *comprendre les arguments du COMPUT* ecclésiastique *(computi)*. *Si les saints docteurs avaient considéré comme oiseux cet art* (l'art de l'abacus) *transmis par les païens, ils n'auraient jamais appuyé sur son autorité les RÈGLES NÉCESSAIRES A L'ÉGLISE*. *Car*, continue l'auteur, *si l'on veut lire les livres de Bède le vénérable sur le COMPUT* ecclésiastique *(de computo), l'on n'y avance pas sans la connaissance de cet art* (de l'abacus). En résumé, suivant Odon, Bède le vénérable avait écrit *des livres sur le comput ecclésiastique*, et non sur le calcul par l'abacus; mais ce calcul était très utile pour la lecture des livres de comput. Telle me paraît être la cause pour laquelle on avait inséré dans les œuvres du computiste Bède, à titre d'auxiliaire pour les lecteurs, le traité de Gerbert sur l'abacus. Ainsi tombe la preuve du premier des deux points que M. Cantor croyait avoir établis. Passons à l'autre point.

2°. Non content d'attribuer à Pythagore l'invention de l'abacus, Odon dit que *cet art avait été écrit anciennement en grec, et nous croyons*, ajoute-t-il, *que Boèce l'a traduit en latin. Mais, parceque le livre de cet art est difficile à lire, nous avons pris soin d'en détacher quelques règles*... De ces mots, M. Cantor conclut qu'Odon connaissait parfaitement l'origine grecque de l'art de l'abacus, qu'il avait sous les yeux les deux textes de la *Géométrie* de Boèce sur cet art, et qu'il les jugeait authentiques. Au contraire, les phrases citées prouvent qu'Odon avait sous les yeux *tout un livre sur l'abacus*, et qu'il le croyait *traduit du grec par Boèce lui-même*, tandisque les deux passages de la *Géométrie* de Boèce sur l'abacus sont donnés par Boèce lui-même comme *tirés de l'écrivain LATIN Archytas*. Ainsi Odon ne connaissait ni la *Géométrie* de Boèce, ni les deux passages sur l'abacus; mais il considérait à tort comme œuvre de Boèce un traité de l'abacus rédigé d'après ces deux passages de Boèce, ou d'après le traité latin d'Archytas, entre le VI[e] siècle et le X[e].

Ainsi l'art de l'abacus avec neuf chiffres, introduit en occident par l'écrivain latin Archytas, s'était transmis par des traités sur cet art, composés entre l'époque de Boèce et celle d'Odon de Cluny, qui abrégea un de ces traités, considéré par lui comme œuvre de Boèce. Puis, peu d'années après l'époque d'Odon, Gerbert retrouva, comme nous le verrons, à Mantoue un manuscrit de la *Géométrie* même de Boèce, et

---

tation, les citations d'un auteur par lui-même à la troisième personne ne sont pas sans exemple, et comme M. Hauréau le remarque l'abbaye de Bourgdéols en Berry, placée sous l'invocation de la Sainte Vierge, était aussi, suivant quelques uns, sous le gouvernement d'Odon de Cluny, bien que les Bénédictins inclinent à distinguer l'un de l'autre Odon abbé de Cluny et Odon abbé de Bourgdéols. — 7) *Scriptores ecclesiastici de musica*, éd. Martinus Gerbertus (St Blasien, 1784), t. 1, p. 296-302: *Regulæ domini Oddonis super abacum*. Les quatre traités précédents occupent les p. 247-295.

il composa un traité de l'abacus, qu'on insera dans le recueil des œuvres de Bède, pour la commodité de lecteus. Telle est la conclusion importante qui ressort d'une interprétation exacte de l'Introduction du traité d'Odon sur les *Règles de l'abacus*.

Le corps même de l'ouvrage d'Odon, excepté en ce qui concerne la division, présente des explications plus complètes et plus claires que celles de Boèce. Ceci indique les progrès que les abacistes avaient réalisés en quatre siècles depuis Boèce. Mais l'identité du fond ne prouve pas, comme M. Cantor le suppose, qu'Odon ait puisé directement dans l'ouvrage authentique de Boèce lui-même.

Odon appelle *arc* chaque colonne de l'abacus. Ce nom est le plus fréquent chez les abacistes du XI[e] siècle. Mais Boèce (p. 1518-1519) les nomme *paginulæ* et non *arcus*, et il suppose (p. 1518, dernière ligne) que chaque colonne est close en haut par une *ligne (linea)*: il ne parle pas d'*arcs*. Ces arcs, qu'on voit dans le manuscrit d'Erlangen, mais non dans le manuscrit de Chartres 8), avaient été ajoutés à la figure de Boèce. M. Cantor aurait dû noter ces différences entre Odon et Boèce.

Ensuite Odon donne les noms et les signes pour les nombres de 1 à 9. Les noms sont latins. Les signes manquant dans le texte imprimé; mais la description que l'éditeur en donne dans une note 9), convient aux neuf de Boèce, tels qu'ils sont dans les manuscrits d'Erlangen et de Chartres. On ne trouve chez Odon ni le zéro, ni les noms barbares des neuf nombres. Par conséquent, ni le zéro, ni ces noms étranges ne se trouvaient dans le traité *de l'abacus* dont Odon attribuait faussement la rédaction à Boèce. Mais ces noms, dont plusieurs sont des noms grecs altérés et motivés par des idées pythagoriciennes, devaient se trouver, dès avant l'époque d'Odon, dans d'autres traités de l'abacus, et, quoi qu'en dise M. Cantor, il est possible que, dès avant cette époque, ils se trouvassent sur des figures interpolées de l'abacus dans des manuscrits de la *Géométrie* de Boèce.

Comme Boèce, Odon nomme *nombres digitaux* les unités simples, et nombres *articulaires* les dixaines.

Comme Boèce, mais avec plus de clarté, il donne d'abord les règles de la multiplication. Le *multiplicande (summa)* se place ou *haut des colonnes (summitate arcuum)*. Le *multiplicateur (fundamentum)* se met audessous, et le produit (encore audessous, mais) entre deux lignes (horizontales). M. Cantor aurait dû remarquer que ces sens des mots *summa* et *fundamentum* sont aussi étrangers à Boèce que celui du mot *arcus* désignant les *colonnes*. Ensuite vient un exemple, à propos duquel il est dit que les rôles du multiplicande et du multiplicateur sont réciproques: remarque juste, qui ne se trouve, dit M. Cantor, ni chez Boèce, ni chez les abacistes du XI[e] siècle. Dans cet exemple, le multiplicande 5 et le multiplicateur 7 étaient ecrits en chiffres pythagoriques, que l'éditeur a remplacés par nos chiffres dits arabes, et le produit XXXV est donné en chiffres romains, parceque, jusqu'à l'introduction du zéro, les chiffres ne pouvaient servir en dehors de l'abacus pour exprimer un nombre supérieur à 9, lorsqu'un ordre d'unités venait à manquer. Les autres règles d'Odon, pour les cas où l'un des deux facteurs ou bien tous les deux ont des unités de différents ordres à écrire dans différentes colonnes de l'abacus, sont données par Odon avec beaucoup de clarté, mais sans exemples.

Ensuite, comme Boèce, Odon distingue trois espèces de division, suivant que le diviseur n'a que des unités d'un seul ordre, ou bien qu'il a des chiffres à placer dans des colonnes immédiatement consécutives de l'abacus, ou bien qu'il a des chiffres séparés par une colonne vide. De même que Boèce il donne au *quotient* le nom de *denominatio*, nom qui est, au contraire, celui du *dénominateur* des fractions dans les écrits latins d'origine arabe. De même que Boèce, il dit *secundare*, pour dire de placer un chiffre dans la colonne suivante. Quant au mot *differentia*, Odon ne l'emploie pas dans le même sens que Boèce, et son exposition des règles de la division est si obscure, dit M. Cantor, qu'il est difficile d'entrevoir s'il a voulu enseigner, comme Boèce, le *procédé complémentaire*, qu'on peu appeler *division à l'aide des*

8) Voyez ci-dessus, chap. XVI. — 9) Cette note est reproduite par M. Cantor, note 566, p. 424-425.

différences 10). M. Cantor remarque que l'obscurité des règles de la division n'est guères moindre chez d'autres écrivains habituellement fort clairs: Odon lui-même déclare que, pour être bien comprise, cette opération a besoin que l'enseignement oral supplée à l'insuffisance des préceptes écrits.

De la division, Odon passe aux fractions. Il dit que chez les anciens toute unité entière se nomme *as*, que l'*as* se divise en 12 *onces*, et l'*once* en 24 *scrupules*. Il indique les noms latins qui désignent par un seul mot la réunion d'un certain nombre d'onces ou de scrupules. Son fractionnement de l'as en divers nombres d'onces est conforme à l'ancienne division romaine. Pour les subdivisions de l'*once* jusqu'au scrupule inclusivement, Odon ne suit ni le vieux système romain de Volusius Mæcianus, ni le système pythagorique d'Archytas le jeune et de Boèce, mais bien (ce que M. Cantor n'a pas remarqué) le système gréco-romain de l'empire d'Orient et des derniers temps de l'empire d'occident, tel qu'on le trouve chez Priscien 11). Mais ce système ne descend pas audessous du *scrupule*. Pour les fractions inférieures, nous retrouvons chez Odon quatre fractions de Boèce, savoir: *obolus*, moitié du scrupule; *ceratis*, qui en est le quart; *siliqua*, qui en est le sixième, et *calculus*, qui en est le huitième 12), mais que Boèce nomme *punctum*. Odon ne descend pas jusqu'au *minutum* et au *momentum*, dernières fractions de Boèce.

Les signes de toutes ces fractions de l'as manquent dans l'édition. Mais une note de l'éditeur Martin Gerbert sur le traité de *Musique* de Bernelinus, compris dans le même recueil 13), montre que les signes qu'il donne pour les fractions dans ce traité sont les mêmes que ceux du manuscrit de l'opuscule d'Odon, et ils sont identiques aux signes employés de même par Bède pour désigner les fractions de l'as et de l'once.

Odon expose assez longuement le calcul de ces fractions, et il termine en remarquant qu'audessous de la plus petite espèce la division peut encore donner un reste, parceque rien n'est parfait, *si ce n'est le Père éternel de toutes choses.*

De cette intéressante analyse, dont nous lui sommes redevables, M. Cantor conclut qu'Odon était très instruit dans l'art de l'abacus, qu'il en avait recherché l'origine, et qu'il tenait pour certain qu'une grande partie de cet art, et notamment les neuf chiffres, venaient des Grecs par l'intermédiaire de Boèce.

D'après les observations présentées plus haut, voici ce qu'il me paraît nécessaire d'ajouter: Odon avait pris ses *règles de l'abacus* dans un traité latin qu'il avait considéré à tort comme une traduction, faite par Boèce, d'un traité grec; la source principale de ce traité antérieur à Odon se trouvait dans les deux passages arithmétiques de la *Géométrie* de Boèce; mais, à la place de plusieurs des termes mathématiques employés par le géomètre romain, d'autres termes tout différents s'étaient introduits dans ce traité.

Dans l'opuscule d'Odon, il est question de la langue hébraïque. Quant aux Arabes, il n'en dit pas un mot, et son traité ne contient rien de ce qui caractérise les traités arabes sur le calcul arithmétique, savoir: ni le zéro, ni la preuve par 9, ni les fractions sexagésimales, ni des expressions techniques prises dans le sens qui vient des écrits arabes.

D'un autre côté, l'opuscule d'Odon offre des caractères qui ne peuvent pas convenir à une époque plus récente que le XIe siecle, et cet opuscule est même probablement d'une époque antérieure, puisqu'il ne dit rien des noms *igin, andras*, etc., répétés dans tous les traités du XIe siècle et dont il aurait vraisemblablement parlé, s'il les avait connus. Tout se réunit pour désigner le Xe siècle comme époque de la rédaction des *Règles de l'abacus*, et Odon de Cluny comme l'auteur véritable 14).

J'ajoute que de l'*Introduction* du traité il résulte qu'avant l'époque de l'auteur, c'est-à-dire avant le Xe siècle, il existait depuis longtemps un traité de l'abacus rédigé d'après les principes de Boèce; car, si ce traité avait été récent, Odon, en s'en servant, n'aurait pas pu, comme j'ai montré qu'il l'a fait, le croire rédigé par Boèce lui-même.

---

10) Voyez ci-dessus, chapitre XV. — 11) Voyez ci-dessus, chap. XV, note 10, et comparez M. Hultsch, *Métrologie*, p. 113-114. Peu fort en étymologies, Odon dit que le nom du quart de l'once, *sicilicus*, se dit *siclus* en grec et *sichel* en hébreu. — 12) Le texte imprimé donne ici *calques (calcos)*. Mais un autre passage prouve que c'est *calculos* qu'il faut lire. *Le chalque* grec était le huitième de l'*obole*, et non du *scrupule*. — 13) P. 313, note f. voyez cette note reproduite par M. Cantor, note 572, p. 425. — 14) A la fin du XIIe siècle, un autre Odon, abbé de Morimond, avait laissé, entre autres ouvrages, un traité *Sur les significations des nombres*.

XXI. Vie de Gerbert. 1)

Ce chapitre offre un résumé critique de la vie de Gerbert, surtout d'après le recherches de M. Hock 2), de M. Büdinger 3) et les miennes 4). En voici les points principaux.

Né en Auvergne, de parents pauvres, vers la fin de la première moitié du Xᵉ siècle, Gerbert trouva dans Raimond, écolâtre du convent de Saint Géraud à Aurillac, et dans Géraud abbé du même couvent ses premiers maîtres et amis, dont le premier était probablement élève d'Odon de Cluny.

Le premier voyage de Gerbert qui soit bien attesté 5), est celui qu'il fit d'Aurillac dans le comté de Barcelone, avec le consentement de ses supérieurs, en compagnie du comte Borel, pour y compléter son instruction près d'Hatton, évêque de Vich, ville où les études mathématiques étaient en honneur chez les moines. Cette ville du comté de Barcelone, prise par Charlemagne en 778, reprise par les Maures, puis délivrée en 812 par l'assistance de Louis d'Aquitaine, était restée depuis ce temps sous l'autorité chrétienne, malgré les attaques fréquentes des Maures. Il y avait trève entre eux et les Chrétiens, lorsque Borel, comte d'Urgel depuis 950, devint, en 967, comte de Barcelone, en vertu d'un testament du comte Séniofred, qui cependant laissait deux frères. M. Büdinger conjecture avec vraisemblance qu'aussitôt Borel vint en France, pour faire confirmer par l'investiture royale de Lothaire ses droits contestés, et qu'ainsi ce fut en 967 ou 968 qu'il emmena Gerbert du couvent d'Aurillac. Hatton ou Haiton était devenu évêque de Vich en 960. En 962, il fut du nombre des évêques de la Marche d'Espagne qui protestèrent contre la reconnaissance de l'autorité archiépiscopale de l'abbé Césarion, consacré irrégulièrement archevêque de Tarragone par les évêques de Galice. En 970, le pape Jean XIII transporta à Vich le siége de l'archevêché, parceque Tarragone était tombée au pouvoir des infidèles.

La bulle de translation constate la présence d'Hatton et de Borel à Rome, où Gerbert les avait accompagnés. Richer, moine contemporain, raconte qu'à la demande du roi Othon, le pape, c'est-à-dire Jean XIII, engagea Borel et Hatton à laisser leur jeune et savant compagnon de voyage en Italie, où la musique et l'astronomie avaient besoin d'être enseignées par un étranger. Mais Gerbert déclara à Othon qu'avant d'enseigner les mathématiques il voulait continuer en Italie ses études sur la dialectique. Il s'agit évidemment ici d'Othon Iᵉʳ, qui est les premier des trois Othons, désignés par Gerbert lui-même comme ayant été ses protecteurs. Cet entretien eut lieu au plus tard au commencement d'août 972, puisqu'au 18 de ce mois Othon avait quitté l'Italie et datait de Constance la confirmation des immunités du monastère de Rheinau. Le pape Jean XIII mourut le 5 septembre suivant.

Vers le même temps, un savant dialecticien, l'archidiacre G. (Garamnus suivant M. Büdinger), ambassadeur de Lothaire près d'Othon Iᵉʳ, obtint le consentement de l'empereur pour emmener Gerbert à Reims, où, d'abord élève en dialectique, il devint bientôt professeur de mathématiques. Pendant les dix années de son séjour à Reims, il eut tout le temps de se lier avec l'évêque Adalbéron, avec Constantin, écolâtre de Fleury, et avec d'autres amis mentionnés dans ses lettres 6). Par ses leçons, l'école de Reims acquit une grande renommée, et elle eut pour élèves beaucoup d'hommes qui devinrent puissants. Robert, fils du roi de France Hugues Capet, fut un des élèves de Gerbert.

A noël de l'an 982, Gerbert était à Ravenne 7), à la cour d'Othon II; il soutenait contre Ohtric, le

---

1) *Gerberts Leben*, p. 303-313. — 2) *Gerbert oder Pabst Sylvester II und sein Jahrhundert* (Wien, 1837). — 3) *Ueber Gerbert's wissenschaftliche und politische Stellung* (Marburg, 1851). — 4) *Rech. nouv. sur les origines de notre syst. de numération écrite*, p. 9-22. — 5) Hock suppose, sans preuves, un premier voyage, dans lequel Gerbert aurait visité les écoles claustrales du nord la France, telles que celles de Reims, de Fleury et de Tours, et y aurait contracté dès lors des relations d'amitié. — 6) C'est donc inutilement que, pour expliquer les amitiés de Gerbert, M. Hock a imaginé un premier voyage qu'il aurait fait dans le nord de la France avant d'aller en Catalogne. — 7) La date donnée par M. Cantor (p. 308, l. 7) est 980, mais probablement par une faute d'impression pour 982; car c'est 982 qu'il donne (p. 308, l. 17-22) pour la date de la lettre écrite de Mantoue par Gerbert *vers la même époque*; il dit que Gerbert vint enseigner à Reims *en* 982, et qu'il resta 10 *ans* (p. 307), *jusqu'en* 982 (p. 321).

plus savant homme de la cour, une discussion philosophique et mathématique, et il recevait d'Othon l'abbaye de Bobbio. C'était vers cette même époque, que, de Mantoue, il annonçait à Adalbéron 8) sa découverte de *huit livres de Boèce sur l'astronomie*, et de livres du même auteur sur la *Géométrie* et sur d'autres objets 9).

Othon II étant mort le 7 décembre 983, Gerbert, entouré de jalousies et de haines, et mal vu du pape Jean XIV, quitta l'abbaye de Bobbio et revint à Reims près de l'évêque Adalbéron, sous le prétexte d'y continuer ses études, mais avec l'intention d'user de son influence sur Hugues Capet, pour s'opposer à l'union du roi de France Lothaire avec Henri de Bavière contre les droits d'Othon III, âgé de quatre ans. Ayant réussi à obtenir, en 985, une paix favorable à ce dernier, il eut la pensée d'aller en Saxe près de la princesse grecque Théophanie, veuve d'Othon II et mère du jeune empereur. Mais le roi de France Louis le Fainéant étant mort le 19 mai 987, Charles de Lorraine, frère de Lothaire et héritier le plus proche, fut écarté, Hugues Capet fut élu roi, et fit couronner aussi son fils Robert avant la fin de janvier 988. Adalbéron, à qui Gerbert avait espéré succéder, mourut vers la même époque. Mais, en présence des succès de Charles de Lorraine, on voulut gagner au parti des Capétiens Arnulf, fils naturel de Lothaire, en lui donnant l'archevêché de Reims. Traître à ses serments, Arnulf livra la ville à son oncle Charles. Secrétaire d'Arnulf, mais surveillé de près, Gerbert réussit, vers la fin de 989, à fuir vers Hugues Capet. En 991, il alla avec ce prince au siége de Laon, où Charles de Lorraine et Arnulf s'étaient retirés. Du milieu du camp, Gerbert écrivait à Rémi de Trèves une lettre concernant l'arithmétique. La ville de Laon fut prise au bout de quelques mois; Charles resta prisonnier à Orléans jusqu'à sa mort, et Arnulf fut déposé, le 16 juin 991, par un synode de Reims. Le même synode appela Gerbert à l'archevêché de Reims, pour lequel il avait été désigné par l'archevêque Adalbéron mourant. Mais le pape Jean XV refusa de confirmer la décision du synode. Pendant trois ans, Gerbert négocia, refusant sa démission et demandant un nouveau synode. Enfin, en 994, cédant aux instances d'Othon III, il quitta Reims, pour se rendre à la cour impériale. Au mois de juin 995, il vint se présenter au synode de Mouson, qui renvoya l'affaire à un synode convoqué pour le 1er juillet: en attendant, Gerbert, sans renoncer à son titre, dut s'abstenir du service divin.

Peu de temps avant le synode de Mouson, il dressait à Magdebourg un cadran solaire, en s'aidant de l'observation de l'étoile polaire, sans doute pour trouver la hauteur du pole et par conséquent la latitude du lieu, ou bien pour tracer la méridienne. Aussitôt après le synode, en accompagnant Othon III dans une expédition contre les Slaves de l'Elbe et de l'Oder, il écrivait sa *Géométrie*.

Pendant ce temps, Rome était en proie aux plus grands désordres. Au printemps de l'an 996, accompagné de Gerbert, Othon III, avec une armée, passait les Alpes. A Ravenne, il apprenait que Jean XV était mort le 9 mai. Dès le 21 mai, Bruno, de la maison de Saxe, élu pape sous le nom de Grégoire V, sacrait à Rome Othon III empereur, et Gerbert devenait conseiller du jeune pape, pendant qu'Othon III retournait en Allemagne.

Au milieu de ces événements, Gerbert engageait Othon III à orner d'un monument le tombeau de Boèce à Ravenne, et il en composait lui-même l'inscription. Vers ce même temps ou peu après, il terminait son traité *De la division*, dédié à Constantin, moine de Fleury.

Bientôt le patricien Crescentius chassait Grégoire V et Gerbert; mais Othon revenait à Rome et faisait périr Crescentius et ses partisans. En 998, Gerbert était nommé évêque de Ravenne. Le 5 février 999, Grégoire V mourait, et le 2 avril suivant Gerbert devenait le pape Sylvestre II. Il mourait le 12 mai 1003, après quatre ans de souverain pontificat. Il avait vu Othon III battu dans une troisième expédition contre les Romains révoltés; le jeune empereur était mort à Paterno, à l'âge de 22 ans, le 22 janvier

---

8) Cette lettre, placée en 973 par les Bénédictins, est bien plutôt de 982, suivant MM. Hock et Cantor. — 9) Voyez ci-dessus, chapitre XII.

de l'an 1002, soit de maladie, soit de poison; et Gerbert, ce grand homme, irréprochable dans ses intentions, sinon dans toute sa conduite, avait peut-être compris, dit M. Cantor, que la domination allemande en Italie, et le *saint empire germanique* avec Rome pour centre, n'étaient qu'un funeste rêve.

Tel est le résumé de l'histoire de Gerbert, d'après des documents irrécusables. En la donnant avec moins de détails, j'y avais joint une étude 10), à la quelle M. Cantor se contente de renvoyer dans une note (598, p. 128), mais qui me paraît importante pour l'objet de son livre: en faisant connaître les opinions sur Gerbert, depuis ses contemporains jusqu'à la fin du XIII[e] siècle, j'avais suivi pas à pas la formation de la légende fabuleuse qui a fait de ce savant moine et de ce grand pape un apostat et un sorcier, et j'avais montré que la tradition prétendue historique qui fait de Gerbert un disciple des Arabes de Cordoue, est un des éléments essentiels de cette fable absurde, tandisque cette tradition apocryphe est entièrement étrangère à l'histoire véritable de ce personnage, calomnié surtout par les ennemis de la maison de Saxe, dont il avait été le protégé.

XXII. Connaissances mathématiques de Gerbert. 1)

Nous ignorons quelle fut la méthode de l'enseignement que Gerbert reçut à Aurillac sous la direction de l'écolâtre Raimond et de l'abbé Gérand, puis à Vich près de l'évêque Hatton, et nous ne savons pas quel fut dans cette dernière ville son maître de mathématiques. M. Hock désigne un certain Joseph, mais sans dire ses motifs. M. Cantor, qui les a devinés, en montre l'insuffisance.

Dans un manuscrit de Saint Emmeran de Ratisbonne, l'auteur G. s'adresse à son *père en Jésus-Christ le théologien J.* Sans doute, M. Hock aura cru, comme Pez avant lui, et comme M. Chasles lui-même l'avait pensé d'abord, que G. était Gerbert, et il aura supposé que J. devait être Joseph, dont Gerbert parle dans deux de ses lettres. Mais, plus récemment, M. Chasles a prouvé que le G. du manuscrit de Ratisbonne est Gerland, écrivain de la fin du XI[e] siècle. D'un autre côté, rien n'indique que l'espagnol Joseph, dont Gerbert parle dans deux lettres, et que, dans l'une des deux, il nomme *le sage Joseph*, ait été un de ses maîtres. Dans ces deux lettres, on voit que Gerbert voulait procurer à Adalbéron de Reims un traité de Joseph sur la multiplication et la division, et que lui-même désirait beaucoup connaître ce traité: il le demande d'une part à un ecclésiastique de la Marche d'Espagne, d'autre part à l'abbé d'Aurillac, à qui l'abbé catalan Guarin en avait laissé un exemplaire. C'est d'une tout autre manière que Gerbert a coutume de parler de ses amis et de ses maîtres.

M. Cantor rejette, à plus forte raison, l'hypothèse de M. Büdinger, d'après laquelle l'auteur de ce traité sur la multiplication et la division, que Gerbert désirait tant de connaître et de procurer à Adalbéron, serait l'arabe Joseph ben Omar Algiaberi. Cet astronome arabe est mort en 1043, tandisque les deux lettres de Gerbert sont de 973. Il serait peu vraisemblable que *le sage Joseph* eût mérité ce titre et composé un ouvrage important 70 ans avant de mourir. D'ailleurs, le traité de Joseph demandé par Gerbert était *en latin*. Or, dans une autre lettre, en demandant à un certain Lupitus de Barcelone la traduction latine que celui-ci avait faite d'un ouvrage astronomique, Gerbert ne nomme pas même l'auteur de l'ouvrage original. Il est donc bien probable que la rédaction latine du traité de Joseph sur la multiplication et la division était le texte original de Joseph lui-même. Joseph n'était donc pas un arabe. M. Cantor conjecture que ce pouvait être un juif d'Espagne, ou bien un Maure élevé parmi les Chrétiens et instruit dans leurs langues et dans leurs sciences. Mais il me paraît bien plus probable que ce Joseph était tout simplement un chrétien espagnol 2). *Joseph* était un nom très convenable en tout pays pour

---

10) *Rech. nouv. sur les origines de notre système de numération écrite*, § IV. p. 20-27. — 1) *Gerbert's Mathematik*, p. 314-329. — 2) Voyez Cossali, *Memorie scientifiche sulla origine dell'odierna aritmetica*, Rifl. VIII, p. 366-367 (*Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni*).

un chrétien du X. siècle. Tel était le nom du *théologien Joseph*, que Gerland, à la fin du XIe siècle, appelait son *père en Jésus-Christ*, comme nous venons de le voir.

Si nous ne connaissons pas les maîtres de Gerbert en mathématiques, nous connaissons sa méthode d'enseignement, que son contemporain le moine Richer expose en détail. Les élèves étudiaient la philosophie dans des traités latins traduits du grec, surtout dans les traductions du *consul Manlius*, c'est-à-dire de Boèce. Ensuite venait la rhétorique, à laquelle se joignait l'étude des poètes latins; puis venaient les exercices de dialectique sous un maître spécial. Une autre série d'études était consacrée aux mathématiques, dont Gerbert s'occupait particulièrement, savoir : 1°. à l'arithmétique; 2°. à la théorie du monochorde et de toute la musique, alors à peine connue en France; 3° à l'astronomie, que Gerbert tâchait de rendre intelligible à l'aide d'instruments énumérés par Richer; 4° à la géométrie. M. Büdinger a prouvé que les instruments astronomiques de Gerbert, de même que le monochorde, venaient d'une tradition gréco-romaine et non arabe. Les traités employés par Gerbert devaient avoir une origine semblable. Ce devaient être, dit M. Cantor, ceux de Boèce, dont Gerbert cite la *Géométrie*, ou bien ceux d'auteurs qui avaient pris Boèce pour modèle. M. Cantor oublie qu'il a placé vers le mois de décembre 982, c'est-à-dire après la fin des dix années de professorat de Gerbert à Reims, la date de la lettre où Gerbert témoigne tant de joie d'avoir découvert à Mantoue l'*Astronomie*, la *Géométrie* et d'autres traités de Boèce. Il ne connaissait donc, avant cette époque, que des imitateurs de la *Géométrie* du savant romain. J'ai montré (chapitre XX) qu'un demi-siècle auparavant il en était de même pour Odon de Cluny.

Richer nous apprend que Gerbert, avant d'aborder la géométrie, commençait par enseigner le calcul, à l'aide d'un *abacus* en bois, qu'il avait fait fabriquer: d'après la description, cet abacus devait être semblable à celui de Boèce, et Gerbert y employait même, comme Boèce, les *apices* mobiles portant les neuf nombres, au lieu de les écrire sur l'abacus. Ce n'était pas en tête de la première partie de sa *Géométrie*, mais avant la seconde partie, que Boèce exposait la méthode de l'abacus. Ce léger déplacement n'empêche pas de reconnaître la tradition de Boèce dans l'enseignement de Gerbert.

Mais comment se fait-il que Gerbert ait placé l'astronomie avant la géométrie, tandisque Boèce la plaçait après ? M. Cantor répond que Richer a pu se tromper sur l'ordre des sciences, de même qu'il s'est trompé en omettant la grammaire dans le *trivium*, et que, d'ailleurs, l'enseignement astronomique de Gerbert, étant tout pratique, pouvait se passer d'être précédé par la géométrie. Rappelons-nous aussi que le traité astronomique de Boèce, aujourd'hui perdu, n'avait été découvert par Gerbert que vers la fin de 982, lorsqu'il avait cessé d'enseigner.

Ce que Richer dit de la méthode de Gerbert pour la division sur l'*abacus*, confirme que le traité *de la division* adressé à *C.* est bien un traité de Gerbert adressé à son ami Constantin, quoique ce traité se trouve aussi parmi les œuvres de Bède.

Une lettre de Gerbert à Rémi de Trèves 3), malgré les corrections très heureuses apportées au texte par M. Friedlein 4), reste très obscure, parcequ'elle ne répète pas les difficultés arithmétiques que Rémi avait proposées dans une lettre aujourd'hui perdue, et auxquelles Gerbert répond. On entrevoit seulement qu'il s'agissait de deux questions distinctes, l'une sur les racines des nombres carrés, à commencer par l'unité, qui seule est elle-même son propre carré, l'autre sur un problème analogue au XXIXe d'Alcuin, et dans lequel, le nombre 10 étant représenté par le chiffre 1 dans la seconde colonne à droite de l'abacus, il fallait diviser ce nombre en deux parties (6 et 4) dont la seconde fût le deux tiers de l'autre 5).

3) *Epist.* CXXXIV (Duchesne, *Hist. Franc. Script.*, t. 2, p. 820). — 4) La plus grave et la plus nécessaire des corrections de M. Friedlein consiste à lire *de numero* I, au lieu de lire *de numero D*, dans la première phrase. Le texte corrigé par M. Friedlein est reproduit par M. Cantor dans sa note 586 (p. 427), et il en donne la traduction en allemand (p. 318). — 5) M. Büdinger conservait la lettre D signifiant 500; mais alors la première phrase était inintelligible. De plus, il voulait que dans la seconde phrase le nombre 10 fût représenté par le chiffre arabe 1 suivi d'un point arabe équivalent au zéro, tandisque, dans le texte de Gerbert, il est dit que le chiffre 1 vaut *dix*, parcequ'il est placé audessous du nombre X, c'est-à-dire dans la colonne des dizaines, de l'abacus. Ces deux erreurs de M. Büdinger n'avaient fait qu'embrouiller la question et fausser le sens de la lettre de Gerbert, pour faire de lui un disciple des Arabes.

La *Géométrie* de Gerbert, écrite en Allemagne, probablement en 995 suivant M. Hock, serait rédigée, suivant lui, non-seulement d'après des sources grecques, mais aussi d'après des sources arabes, parce-qu'elle contiendrait des mots tirés les uns de l'arabe, les autres du grec. Mais il est faux, dit M. Cantor, qu'on y trouve un seul mot venant de l'arabe, tandisqu'on y rencontre à chaque page, d'après le manuscrit du XII[e] siècle comme d'après l'édition de Pez, des expressions grecques écrites quelque fois en lettres latines et quelquefois en lettres grecques. Les auteurs qui y sont cités sont Pythagore dans les chapitres IX et XI, le *Timée* de Platon dans le chapitre XIII, Eratosthène dans le chapitre XCIII, le *Commentaire* de Chalcidius *sur le Timée* dans le chapitre I[er], le *Commentaire* de Boèce *Sur les Catégories* d'Aristote dans le chapitre VIII, et enfin l'*Arithmétique* de Boèce dans la Préface et dans les chapitres VI et XIII. Ainsi toutes les citations, de même que les locutions employées dans l'ouvrage, indiquent une source gréco-romaine; mais elles n'ont pas pour source immédiate la *géométrie* de Boèce. Il en est de même du contenu scientifique de l'ouvrage, comme M. Cantor l'affirme en se référant aux preuves données par M. Chasles. Il ajoute seulement que dans la *Géométrie* de Gerbert on trouve les signes bizarres des subdivisions de l'*as*, signes employés, avant l'époque de Gerbert, par Bède, par Odon et par d'autres auteurs moins connus, de sorte que ces signes, bien qu'ils diffèrent de ceux de Volusius Mæcianus, ont certainement une origine romaine, comme le système de fractions qu'ils représentent 6).

C'est d'Allemagne, en 997, que Gerbert doit avoir écrit sa lettre au moine Constantin, et le traité qui s'y rattache, *sur la multiplication et la division*. Pour ce traité, M. Cantor renvoie à l'édition, à la traduction française très exacte et à l'excellente explication que M. Chasles 7) en a données. Quant à la lettre d'envoi à Constantin, que M. Chasles n'avait pas traduite, M. Cantor en donne une traduction allemande. Gerbert y prend le titre d'*écolâtre* et le ton d'un maître avec un ancien élève devenu un ami. Depuis 972 jusqu'à 982, Gerbert avait enseigné les mathématiques à Reims. Dans sa lettre écrite quinze ans plus tard, il dit que *depuis quelques lustres* il a perdu l'habitude de l'enseignement, et qu'il n'a pas entre les mains *le livre*, dont il va essayer de retrouver dans sa mémoire le sens et en partie les paroles. Evidemment il s'agit d'un certain livre d'arithmétique, dont autrefois Gerbert répétait à ses élèves les expressions mêmes.

Quel était ce livre? Suivant M. Friedlein, ce serait une œuvre de Gerbert, et cette œuvre serait la *Géométrie* imprimée dans les œuvres de Boèce. M. Cantor nie avec raison que cette *Géométrie* soit de Gerbert, et que les expressions de la lettre à Constantin se rapportent à un ouvrage de Gerbert lui-même. Mais M. Cantor dit que la ressemblance, constatée par M. Friedlein, entre le passage de la *Géométrie* de Boèce sur la multiplication et la division, et le traité envoyé par Gerbert à Constantin, est trop grande pour être due au hasard. Il se réfère aux preuves qu'il a données de l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce 8); il rappelle que l'auteur de cette *Géométrie* renvoie à son *Arithmétique* et à sa *Musique*, et qu'on n'a jamais cité d'ouvrages de Gerbert sur ces deux sujets. Nous avons de Gerbert une *Géométrie* écrite après l'époque de son enseignement à Reims: elle est très différente de celle de Boèce, que M. Friedlein veut lui attribuer. Si cette dernière, celle qui se trouve dans les œuvres de Boèce, était de Gerbert, comment n'en parlerait-il pas dans son œuvre plus récente sur le même sujet? s'il voulait la faire oublier, pourquoi en parlerait-il dans sa lettre à Constantin? Dira-t-on que le silence de Gerbert sur une *Géométrie* considérée par lui comme œuvre de Boèce ne serait pas moins inexplicable? Non; car la *Géométrie* de Boèce est très inférieure à son *Arithmétique*, citée par Gerbert. D'ailleurs, dans sa fuite de Bobbio en 983, et surtout dans sa fuite de Reims en 989, Gerbert pouvait n'avoir pas emporté avec lui cette *Géométrie*, trouvée par lui à Mantoue en 982; il pouvait donc fort bien ne pas l'avoir en Alle-

---

6) Voyez ci-dessus, chapitres XV, XIX et XX. — 7) *Explication des traités de l'abacus et particulièrement du traité de Gerbert*, p. 47-65 du tirage à part (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 23 et 30 Janvier et 6 février 1843). — 8), Voyez ci-dessus, chapitres XIII et XV.

magne en 997. Au contraire, il avait sans doute à sa disposition l'*Arithmétique* de Boèce, lorsqu'il la citait trois fois dans sa *Géométrie*, écrite en Allemagne en 995. Il avait envoyé un exemplaire de cette *Arithmétique* au jeune empereur Othon III, qui l'en remerciait dans une lettre écrite en 994, et qui l'invitait à lui enseigner la *science des Grecs* sur le calcul. Gerbert acceptait cette invitation, en félicitant le jeune prince, né d'une mère grecque et chef de l'empire romain, de rechercher *les trésors du savoir des Grecs et des Romains* 9).

L'hypothèse de M. Friedlein étant ainsi écartée, il faut en chercher une autre. M. Cantor avait supposé autrefois que le livre dont Gerbert s'était servi pour son enseignement, mais auquel, en 997, il regrettait de ne pouvoir plus recourir pour traiter de la multiplication et de la division, devait être la *Géométrie* authentique de Boèce. Il faudrait alors que Boèce eût possédé cet ouvrage à l'époque de son enseignement. Mais sa lettre écrite de Mantoue vers la fin de 982 prouve que ce fut après avoir cessé d'enseigner qu'il fit la première découverte d'un exemplaire de cet ouvrage.

Obligé de renoncer à cette hypothèse, M. Cantor pense, avec beaucoup de vraisemblance, que le livre dont Gerbert s'était servi à Reims pour enseigner la multiplication et la division, devait être un traité tel que ceux de Bède, d'Alcuin, d'Odon de Cluny, ou du catalan Joseph, dans lesquels ces opérations arithmétiques étaient enseignées d'après la méthode de l'abacus de Boèce, mais avec plus de développements.

Quant au contenu du traité envoyé par Gerbert à Constantin, les règles de la multiplication et de la division y sont enseignées d'une manière qui rappelle celle de Boèce: Ce sont les méthodes de calcul du savant romain, et le mérite de Gerbert est de les avoir propagées. Mais, entre le traité de Gerbert et les deux passages arithmétiques de la *Géométrie* de Boèce, il y a deux différences essentielles: 1°. Gerbert suppose l'usage de l'abacus, sans l'expliquer comme Boèce, parceque c'était chose connue à la fin du X° siècle. 2°. Gerbert ne mentionne pas les neuf chiffres pythagoriques de Boèce, parcequ'il les considère sans doute comme un accessoire non indispensable de la méthode de l'abacus, dans les colonnes duquel les chiffres romains peuvent les remplacer. Ainsi, bien loin d'avoir emprunté les neuf chiffres aux Arabes de Cordoue, et de les avoir introduits chez les Chrétiens, Gerbert les a trouvés chez Boèce et chez ses imitateurs, tels qu'Odon de Cluny, et loin de s'en faire le propagateur, il n'en a pas même parlé dans ses écrits sur l'arithmétique.

D'où vient donc cette fausse tradition, si répandue, d'après laquelle Gerbert aurait été disciple des Arabes et aurait introduit les chiffres arabes chez les chrétiens? Le moine Richer, contemporain de Gerbert, connait tous les détails de sa vie, et la narration qu'il en fait s'accorde parfaitement avec les textes de Gerbert lui-même. Richer et tous les témoins voisins de la même époque, à l'exception d'un seul, n'attribuent à Gerbert aucun voyage en Espagne en dehors du territoire occupé par les chrétiens, ni aucun rapport avec les Arabes. Adhémar de Chabanou seul parmi les contemporains dit que Gerbert *parcourut la France et ensuite Cordoue*. Suivant la remarque de M. Büdinger, les expressions mêmes de ce moine aquitain prouvent que pour lui *Cordoue* était un *pays* comme la France, et non une *ville:* c'était pour lui une vague dénomination de l'Espagne, qui appartenait presque entière au califat de Cordoue. D'ailleurs, le peu qu'Adhémar dit de Gerbert prouve que les circonstances de sa vie et spécialement de son voyage en Espagne lui étaient inconnues. M. Cantor dit fort bien que, si Gerbert était allé chez les Arabes avec le consentement de ses supérieurs, Richer, les amis de Gerbert et Gerbert lui-même auraient parlé de ce voyage, et que, s'il y était allé malgré ses supérieurs, il ne serait pas resté en si bonnes relations avec eux, et ses ennemis, par exemple au synode de Mouson, n'auraient pas manqué de signaler sa faute.

Si M. Cantor avait voulu profiter des témoignages que j'ai réunis 10), il aurait pu ajouter que Ben-

9) Voyez Duchesne, *Script. hist. Franc.*, t. 2, p. 824. — 10) *Rech. nouv. sur les origines de notre système de numération écrite*, IV, p. 20-25,

non, les autres ennemis de la mémoire de Gerbert en Allemagne sous la maison de Franconie, et les rares échos que leur haine contre ce protégé de la maison de Saxe trouva en France au XI[e] siècle, accusent Gerbert de maléfices, mais qu'ils se taisent entièrement sur ses rapports prétendus avec les Arabes. J'ai montré que le premier auteur connu de cette fable, d'après laquelle Gerbert aurait emprunté aux Arabes l'abacus en même temps que tout un trésor de sortilèges, est l'anglais Guillaume de Malmesbury, chroniqueur du XII[e] siècle, aussi ami du merveilleux que mal renseigné sur les affaires du continent, et que, de la chronique romanesque de Guillaume, cette fable a passé, à la fin du XII[e] siècle et au XIII[e], dans les écrits de Gui de Bazoches, d'Albéric de Trois-fontaines, de Vincent de Beauvais et de Martin de Pologne, qui en ont été les premiers propagateurs. Cette fable pouvait paraître vraisemblable alors, parceque, depuis le commencement du XII[e] siècle, les traités mathématiques de Boèce et de ses imitateurs étaient négligés pour des traités plus récents, traduits ou imités de l'arabe par Adelhart de Bath et par d'autres, de sorte que les Arabes étaient regardés alors comme les maîtres par excellence en fait d'arithmétique. Quant aux disciples et amis de Gerbert et à ses imitateurs du X[e] siècle et du XI[e] ils s'accordent avec lui-même pour indiquer l'origine purement gréco-romaine de son savoir mathématique, et la *Chronique de Verdun* le nomme un *second Boèce*. Enfin, M. Cantor aurait pu m'emprunter aussi cette remarque, que Gerbert, dans ses écrits, n'a mentionné les Arabes que deux fois, et uniquement comme ennemis des Chrétiens.

Dira-t-on que les chrétiens de Catalogne ont enseigné à Gerbert l'arithmétique arabe? Non, répond M. Cantor, et il en donne deux raisons, dont la dernière est décisive. 1°. Le système de numération emprunté par les Arabes aux Indiens s'est propagé si lentement chez les Arabes occidentaux, qu'il est douteux qu'il fût en usage au X[e] siècle dans le califat de Cordoue 11). 2°. En supposant, avec peu de vraisemblance, que dès l'époque du séjour de Gerbert en Catalogne ce système eût passé des Arabes aux Chrétiens de la Marche d'Espagne, il faudrait dire que Gerbert, accoutumé d'avance à la pratique de l'abacus gréco-romain et aux procédés arithmétiques de Boèce développés par Bède, par Alcuin et par Odon de Cluny, n'aurait pas compris l'avantage de les remplacer par la méthode indo-arabe. Car c'est la méthode gréco-romaine, avec l'abacus, sans le zéro, et sans aucun des caractères propres à la méthode indo-arabe, que nous trouvons dans les écrits mathématiques de Gerbert, comme dans ceux de ses prédécesseur que nous venons de nommer 12). J'ajoute que, ni dans son traité *de la multiplication et de la division*, ni ailleurs, Gerbert n'a même mentionné les neuf chiffres pythagoriques de Boèce et d'Odon de Cluny.

XXIII. Les abacistes et les algoritmiciens. 1)

Dans ce chapitre, M. Cantor se borne, comme il le déclare, à résumer les résultats des recherches de M. Chasles 2) sur l'histoire de l'arithmétique entre l'époque de Gerbert et celle de Léonard de Pise.

Les *abacistes*, ainsi nommés déjà par Gerbert dans sa *Géométrie*, sont les continuateurs de la pratique gréco-romaine de l'abacus. Tel est Bernelinus, qui, disciple immédiat de Gerbert, signale la Lorraine d'alors, c'est-à-dire l'antique Austrasie tout entière jusqu'aux bouches du Rhin, comme comptant depuis longtemps de nombreux abacistes. En effet, la plupart des abacistes du XI[e] siècle dont nous connaissons la patrie, et que M. Cantor énumère, sont de cette contrée et surtout de la célèbre école de Liège.

11) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 12) La différence essentielle qui existait entre la méthode de Boèce et de Gerbert et la méthode indo-arabe, avait été déjà parfaitement établie par Pietro Cossali, *Memorie storico-scientifiche sulla origine dell' odierna aritmetica*, Rifl. IX, p. 307-372, et *Lezione IV sull'aritmetica*, p. 334-340 (éd. de M. le prince Boncompagni). — 1) *Abacisten und Algorithmiker*, p. 331-340. — 2) *Comptes rendus de séances de l'Académie des sciences*, 23 et 30 janvier, 6 février, 26 juin et 24 juillet 1843.

Bernelinus, Guido d'Arezzo et beaucoup d'autres auteurs disent que l'*abacus* est une table couverte de poussière. Ainsi, dans ces *abacus*, du XI[e] siècle, et sans doute dans ceux des siècles antérieurs, de même que dans l'abacus attribué à Pythagore par Jamblique 3), les lignes tracées sur la poussière remplaçaient les rainures de l'abacus romain, et sans doute les chiffres écrits sur la poussière remplaçaient les *apices* mobiles de Boèce, employés pourtant encore par Gerbert dans son enseignement, suivant le témoignage de Richer. Le traité de Bernelinus, d'après ce que M. Chasles en a dit, paraît ressembler beaucoup à celui d'Odon, et il paraît qu'on n'y trouve ni les noms barbares des neuf chiffres pythagoriques, ni ces neuf chiffres eux-mêmes, au lieu desquels Bernelinus, sans doute à l'exemple de Gerbert 4), emploie les chiffres romains dans les colonnes de l'abacus.

Vers la fin du XI[e] siècle, Gerland, disciple des Bénédictins de Besançon, a écrit un traité de calcul dans lequel il emploie les neuf noms barbares *igin, andras, ormis*, etc., non seulement en tête des colonnes de l'abacus, mais dans le texte même de ses indications sur les opérations à exécuter.

Ces mots barbares se trouvent employés de même par Raoul de Laon, qui vers 1100, marque la transition entre les abacistes et les algoritmiciens, disciples des Arabes. Dans un passage publié en latin par M. Chasles et traduit en allemand par M. Cantor, Raoul exprime avec netteté et précision des conclusions identiques aux nôtres sur l'origine gréco-romaine du calcul de l'abacus, presque oublié en Occident pendant les siècles qui suivirent l'époque de Boèce, puis remis en honneur par Gerbert et par d'autres. Mais à cette tradition romaine de l'abacus Raoul mêle quelques éléments étrangers, venus peut-être de la cabbale juive, savoir: non seulement les neuf noms *igin, andras, ormis*, etc., mais le mot *sipos*, nom d'un signe semblable, dit-il, à une petite roue. Cependant, pour lui, ce signe n'a pas encore la valeur du zéro: l'unique usage qu'il en fait est de l'écrire successivement audessus de chacun des chiffres du multiplicateur, de peur d'oublier à quel point de la multiplication l'on est arrivé.

C'est à l'époque de Gerland et de Raoul que M. Cantor rapporte l'interpolation qui a introduit sur l'abacus, dans les manuscrits de Boèce tels que ceux de Chartres et d'Erlangen, les dix mots *igin, andras, ormis, arbas, quimas, caltis, zenis, temenias, celentis* et *sipos*, et la figure du signe correspondant à ce dernier mot. J'ajoute que la position du mot *sipos* audessus du mot *celentis* dans le manuscrit de Chartres peut indiquer précisément un usage identique à celui auquel Raoul l'emploie.

Si Raoul ne possède pas encore l'usage du zéro arabe, il ne comprend plus l'usage des trois lignes horizontales complémentaires qui, sur l'abacus des manuscrits de Boèce, présentent chacune douze nombres dont chacun est la moitié, le quart ou le huitième d'un des douze nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, etc., écrits en tête des douze colonnes verticales. M. Chasles a montré que Raoul avait sous les yeux ces colonnes horizontales complémentaires de l'abacus, mais sans comprendre qu'elles étaient destinées à faciliter la multiplication par 1/2, par 1/4 et par 1/8, et par conséquent la division par 2, par 4 et par 8. De même, Raoul ne comprend plus le motif du nombre, d'ailleurs variable, des colonnes verticales de l'abacus, réunies trois à trois pour correspondre aux tranches de la numération parlée des Romains 5): Raoul veut que l'abacus ait 27 colonnes verticales, et la raison qu'il en donne, c'est que 27 est le cube de 3.

La transition des abacistes aux algoritmiciens se montre aussi dans l'ouvrage anonyme sur les *Règles de l'abacus* 6). Il est vrai qu'il n'y est question ni du *sipos* ni de sa figure, mais on y lit les noms des neuf premiers nombres depuis *igin*, jusqu'à *celentis*, et dans la première phrase on lit que le mot *abacus* est arabe et qu'il signifie *table*. M. Cantor aurait bien fait d'ajouter qu'aucun mot arabe signifiant *table* ne ressemble au mot *abacus*: c'est le mot grec ἄβαξ qui signifie *tablette sans pied, plateau* 7).

---

3) Voyez ci-dessus, chapitre X.— 4) Voyez le chapitre précédent.— 5) Voyez ci-dessus, chapitres X et XI — 6) Voyez M. Chasles, *Explication des traités de l'abacus*, p. 11-47 du tirage à part (Extrait des *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences*, 26 et 30 janvier 1843. — 7) Voyez ci-dessus, chapitre X.

Au milieu du XIIe siècle, paraît en Angleterre l'ouvrage intitulé *Algoritmi de numero Indorum*. Nous avons vu (chapitre XVIII) que cet ouvrage, publié par les soins de M. le prince Boncompagni, est une traduction latine de l'*Arithmétique* indo-arabe de Mohammed ben Mousa Alkharizmi. Si Adelhart de Bath est vraiment le traducteur, il a cultivé à la fois la méthode greco-romaine de l'abacus et la méthode indo-arabe avec le zéro. Car il avait écrit un traité d'après l'ancienne méthode, et il y présentait l'abacus comme une invention des Pythagoriciens 8).

En ce même siècle, paraît en Espagne le *liber algarismi de practica arismetrice*, ouvrage publié aussi par M. le prince Boncompagni, et qui est une imitation latine de l'ouvrage arabe de Mohammed ben Mousa Alkharizmi par Jean de Séville 9).

Au commencement du XIIIe siècle, la méthode indo-arabe domine en Angleterre, où elle est cultivée par Jean de Holywood (Sacrobosco), et où Guillaume de Malmesbury, confondant les deux méthodes, prétend faire venir aussi des Arabes l'*abacus* de Gerbert, qui vient de Boèce. Cette erreur était favorisée par le discrédit dans lequel était tombée alors en Angleterre la lecture des ouvrages anciens, suivant le témoignage de Jean de Salisbury, cité par M. Cantor (note 623).

Depuis lors, les traces de la méthode gréco-romaine de l'abacus s'évanouissent de plus en plus, et à peine quelques écrivains, jusqu'au commencement du XVIe siècle, se rappellent encore que cette méthode vient de Boèce.

XXIV. Léonard de Pise. 1)

Cultivée jusqu'alors surtout par des moines français et anglais, l'arithmétique, qui devait prendre en Italie de si grands développements, y fut transplantée tout à coup, au commencement du XIIIe siècle, par Léonard de Pise, fils du marchand Bonacci et marchand lui-même. La vie et les écrits de ce personnage ont été mis en lumière par M. Libri d'abord, et ensuite, d'une manière beaucoup plus exacte et plus complète, par M. le prince Boncompagni 2), éditeur des œuvres de Léonard 3). En Italie, ce grand arithméticien du XIIIe siècle n'avait eu pour prédécesseurs bien connus que deux traducteurs de la première moitié du XIIe siècle, Platon de Tivoli 4) et Gherardo de Crémone 5). Né dans la seconde moitié du XIIe siècle Léonard de Pise fut instruit par son père dans la pratique de l'*abacus*. Des affaires de commerce le conduisirent à Bougie, en Egypte, en Sirie, en Grèce, en Sicile, en Provence; il connut les méthodes de numération écrite et de calcul usitées dans tous ces pays; il y ajouta de nouveaux perfectionnements; il résuma cet ensemble de notions d'arithmétique pratique et d'algèbre dans son traité *De l'abacus* 6), composé en 1202 et retravaillé par lui vers 1228. En 1220, il avait publié sa *Géométrie prati-*

---

8) Le traité *De l'abacus*, par Adelhart de Bath, se trouve à Paris dans le manuscrit latin 533 du fonds de Saint Victor, et dans le manuscrit latin n. 1 de Scaliger. L'invention de l'abacus y est attribuée à Pythagore, comme M. Chasles l'avait dit le 20 janvier 1843 (*Comptes rendus des séances de l'Acad. des sc.* t. XVI, p. 238, note 7). Il l'a répété à l'Académie des sciences, en renvoyant aux deux manuscrits de Paris, dans la séance du 24 juillet 1843 (Extrait du *Compte rendu*, p. 3, note 3, du tirage à part). Ceci répond à un doute exprimé par M. Cantor, qui dit (note 513 *a*, p. 420) qu'après avoir parlé du traité d'Adelhart de Bath sur l'abacus dans la séance du 20 janvier 1843, M. Chasles n'en parle plus dans un travail plus récent. Adelhart dit que le mot *abacus* est moderne et signifie *décuple*, mais que le nom ancien de l'abacus était *table de Pythagore*. — 9) Voyez ci-dessus ch. XVIII. — 1) *Leonardo von Pisa*, p. 341-354. — 2) *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano*, 128 p. in-4. (Rome, 1852); et *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, 400 p. in-8 (Rome 1854). — 3) *Scritti di Leonardo Pisano*, 2 vol. gr. in-4. (Rome, 1857-1862). — 4) Voyez M. le prince Boncompagni, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino*, 42 p. gr. in-4 (Rome, 1851). — 5) Voyez M. le prince Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo duodecimo, e di Gherardo da Sabbionetta, astronomo del secolo decimoterzo*, 109 p. gr. in-4 (Rome, 1851). M. Cantor renvoie à la notice détaillée de M. le prince Boncompagni sur les ouvrages mathématiques traduits par Platon de Tivoli; mais il paraît ne pas connaître la notice non moins détaillée du même savant sur les ouvrages mathématiques traduits par Gherardo de Crémone. — 6) *De abaco*, 459 p. gr. in-4. (*Scritti*, t. 1, Rome, 1857).

que 7). En 1225, à Pise, il avait été présenté à l'empereur Frédéric II, et il avait improvisé la solution de problèmes difficiles d'analyse déterminée et indéterminée, posés par Jean de Palerme et par Théodore: pour trouver ces solutions, il avait employé des méthodes dont il possédait seul le secret; il les fit connaître dans trois traités que nous avons 8). Son *Commentaire sur le livre X des Éléments d'Euclide*, et son *livre des marchands* sont perdus 9). Les renseignements manquent sur les derniers temps de sa vie et sur la date de sa mort.

Dans les œuvres de ce mathématicien si heureusement doué, M. Cantor ne s'arrête pas à ce qui constitue ses plus beaux titres de gloire, mais seulement à la partie élémentaire de son traité *De l'abacus*, c'est-à-dire à ce qui intéresse l'histoire de la numération écrite. Au commencement de ce traité, Léonard distingue: 1°. la *méthode de l'abacus de Pythagore;* 2°. la *méthode d'Alkharizmi*, et 3°. la *méthode indienne*, qu'il met beaucoup audessus des deux autres. Suivant M. Cantor, il avait pu connaître cette troisième méthode surtout à Bougie, qui était, dans la Méditerranée, le principal centre du commerce des Arabes avec l'Orient, au XIIIe siècle. Or, cette *méthode indienne* n'est par la numération avec neuf chiffres et avec le zéro, puisqu'à ce compte elle ne différerait pas de la méthode indo-arabe d'Alkharizmi. Ce n'était par non plus l'algèbre, empruntée de même depuis longtemps aux Indiens par les Arabes, qui en développèrent heureusement quelques parties, mais qui en détériorèrent la forme générale, bien loin de la perfectionner. Ce devait être une méthode indienne que les Arabes ne s'étaient pas encore appropriée au commencement du XIIIe siècle. M. Chasles 10) conjecture que c'était spécialement la *Regula falsi*, récemment empruntée aux Indiens par les Arabes, qui la nommaient *elchataym*, c'est-à-dire règle des *deux parties (alkitain)* 11). M. Cantor pense que la *regula falsi*, ou *règle des deux fausses positions* 12), faisait bien partie de cette méthode indienne vantée par Léonard de Pise, mais que celle-ci comprenait de plus divers procédés indiens qui n'étaient pas encore entrés, ou qui n'étaient entrés que depuis peu de temps, dans la pratique des Arabes.

De ce nombre seraient, suivant M. Cantor, les deux méthodes de multiplication que les Indiens nommaient *vajrâbhyâsa*, multiplication *en zigzag*, et *shabacah*, multiplication *en réseau* 13). Or il est bien vrai que la multiplication en *zigzag (vajrâbhyâsa)* se trouve chez Léonard de Pise, dont elle est même le procédé habituel et presque unique 14), procédé extrêmement ingénieux et très expéditif, mais un peu difficile, qui n'est autre que la *moltiplica per crocetta* ou per *casella* de Fra Luca Pacioli 15), et qui consiste à faire les multiplications d'un chiffre par un autre dans un ordre aussi régulier que compliqué, qui avec des additions faites de mémoire à mesure que les produits partiels se présentent, permet de trouver successivement tous les chiffres du produit définitif, quelque grands que soient les deux facteurs, sans avoir écrit aucun chiffre des produits partiels. Mais il n'est par vrai que la *multiplication en réseau (shabacah)*, procédé aussi facile qu'ingénieux 16), qui est la *moltiplica per gelosia* ou *per craticola* de

7) *Practica Geometriæ*, p. 1-224 (*Scritti*. t. 2, Rome, 1862). — 8) *Flos super solutionibus quarumdam quæstionum ad numerum et ad geometriam vel ad utrumque pertinentium* (*Scritti*, t. 2, p. 227-247); *De modo solvendi quæstiones avium et similium* (p. 247-252); *Liber quadratorum* (p. 253-283). — 9) Voyez M. le prince Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, p. 241-248. — 10) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 8 juin 1859. — 11) M. Cantor abandonne ici (p. 350) l'interprétation qu'il avait donnée de ce mot arabe dans le chapitre XVIII (p. 268). — 12) Comparez Cossali, *Memorie Storico-Scientifiche sulla origine dell' odierna aritmetica*, Rif. XIV, p. 377-378 (*Scritti ined. di P. Cossali*, *pubbl. da B. Boncompagni.*) — 13) M. Cantor (notes 646 et 647) renvoie, pour la méthode *Shabacah*, à la description qu'il en a donnée dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (II, 350), et, pour la méthode *Vajrâbhyâsa*, au *Vijaganita* de Bhascara et au commentaire de Ganesa sur le *Lilavâti* du même auteur indien. — 14) *Liber abaci*, p. 11-18. — 15) *Scritti inediti di P. Cossali, pubblicati da B. Boncompagni*, p. 116-117. — 16) Ce procédé consiste à tracer un damier rectangulaire, qui ait autant de rangées verticales de cases, qu'il y a de chiffres dans le multiplicande, et autant de rangées horizontales, qu'il y a de chiffres dans le multiplicateur, à placer chaque chiffre du multiplicande audessus de la colonne verticale de même rang et chaque chiffre du multiplicateur en côté de la colonne horizontale de même rang, à diviser les cases par des diagonales, à écrire dans l'un des triangles rectangles ainsi formes le chiffre des unités et dans l'autre le chiffre des dixaines du produit des deux chiffres qui correspondent simultanément à chaque case, et à faire les additions suivant les colonnes obliques formées par les diagonales.

Pacioli 17), se trouve chez Léonard de Pise: la seconde méthode de multiplication que, dans le passage 18) indiqué par M. Cantor, Léonard ajoute après coup, comme plus facile que la multiplication *en zigzag* pour les grands nombres, est celle que Pacioli nomme *moltiplica per quadrilatero* 19): elle ne diffère de notre méthode ordinaire, c'est-à-dire de la multiplication *par échelons (par scaletta)* des abacistes 20), que par un petit détail de disposition, qui consiste à mettre dans une même colonne verticale d'un damier tracé d'avance le premier chiffre à droite de chaque produit du multiplicande entier par chaque chiffre du multiplicateur, à mettre dans la seconde colonne verticale le second chiffre de chaque produit partiel, et ainsi de suite, puis à faire les additions suivant les diagonales non tracées des petits carrés du damier. Cette méthode n'a aucun avantage sur notre méthode ordinaire, qui a celui de n'avoir pas besoin de cases tracées d'avance.

M. Cantor soupçonne que dans la *methodus indiana* Léonard, comprenait aussi certaines considérations théoriques sur les nombres, dont il n'a donné que les premiers éléments dans son traité *De l'abacus*, mais qui depuis ont été portées à un point qui n'avait jamais été atteint ni par les Arabes, ni par les mathématiciens européens du moyen-âge, ni même, ajoute M. Cantor, par les Indiens.

Comme exemples des considérations que Léonard a trouvées dans la tradition gréco-romaine et en même temps chez les Arabes, M. Cantor cite la théorie des nombres premiers 21), et la décomposition d'une fraction en plusieurs autres fractions qui aient toutes pour numérateur l'unité 22).

C'est aux Arabes, et spécialement à Mohammed ben Mousa, que Léonard a emprunté l'algèbre, à laquelle il conserve son nom arabe 23), et qu'il a emprunté aussi le zéro, dont le nom arabe *sifra* devient chez lui *zephirum* 24) ou neutre (et non *zephirus*, comme le dit M. Cantor).

Quant au *calcul sur les doigts* 25), à la *division complémentaire* 26) et à d'autres procédés de moindre importance, ce sont des emprunts faits par Léonard à la tradition de Boèce, de Bède, d'Odon de Cluny, de Gerbert et des abacistes postérieurs.

Mais Léonard emprunte avec choix et sait perfectionner ce qu'il emprunte. Les Arabes avaient l'usage empirique de la *preuve par 9*: il en donne la démonstration à la manière d'Euclide, c'est-à-dire en substituant des lignes aux nombres.

Dans la soustraction, lorsqu'un emprunt est nécessaire, Léonard, au lieu de diminuer d'une unité le chiffre suivant du nombre principal, prescrit d'augmenter d'autant le chiffre suivant du nombre à soustraire 27): pratique qui donne moins de prise aux distractions, suivant M. Cantor.

Enfin, Léonard s'est occupé 28) de certaines séries de fractions, dans le dénominateur de chacune desquelles on sous-entend comme facteurs les dénominateurs écrits de toutes les fractions précédentes.

M. Cantor dit, en terminant, qu'il aurait pu trouver beaucoup d'autres choses intéressantes à noter dans le traité de Léonard de Pise sur l'abacus. Mais, ne pouvant pas tout dire, il fallait s'arrêter quelque part. Il aurait pu même s'arrêter plus tôt; car il avoue que tout ce chapitre et même le précédent forment une sorte d'appendice à la fin de son livre, qui, malgré le caractère vague de son titre, concerne

---

17) *Scritti ined. di P. Cossali*, p. 118. Les Arabes nommaient aussi cette méthode *chabagah*. Voyez M. Wœpcke, *Traduction du traité d'Arithmétique d'Alkalçâdi*, p. 13 et 14, et note 2 de la p. 13 (Rome, 1859, in-4.). Pour plus de détails sur cette méthode, voyez M. Wœpcke, *Sur quelques anciennes méthodes de multiplication, Arte de labbacho*, Tableaux III et IV, p. 6-18 (Rome, 1863, in-4.) — 18) *Liber Abaci*, p. 10. — 19) *Scritti inediti di P. Cossali*, p. 117. Comparez M. Wœpcke, *Anciennes méthodes des multiplication, Arte de labbacho*, Tableau II, p. 4-6 et p. 10. — 20) Voyez M. Wœpcke, *Anc. méth. de mult. Arte de labbacho*, Tableau I, p. 4, 10 et 11. La *Moltiplica per scachieri* de Pacioli (*Scritti inediti di P. Cossali*, p. 110), l'une des huit qu'il énumère, ne diffère de la *moltiplica per scaletta*, identique à la nôtre, que par la précaution inutile de tracer une case pour chaque chiffre. La *moltiplica per castellaccio* di Pacioli supprime les cases, mais, commençant par en bas, elle place les uns *audessus* des autres les produits partiels du multiplicande entier, et elle remplit par des zéros les places vides à droite des produits supérieurs. C'est une variété insignifiante de notre méthode ordinaire. — 21) *Liber abaci*, p. 30. — 22) *Liber abaci*, p. 78-83. — 23) *Liber abaci*, p. 406 et suiv. sur les mots arabes *aljebr v'almukabalah*, voyez ci-dessus, chapitre XVIII, note 19. — 24) *Liber abaci*, p. 2, l. 4; p. 3, l. 22, etc. 25) *Liber abaci*, p. 5. Comparez p. 7, l. 2, 11, 18, 29, 33, 34 et 43; p. 8, l. 14; p. 17-18; p. 30, etc. — 26) *Liber abaci*, p. 31. — 27) *Liber abaci*, p. 22. — 28) *Liber abaci*, p. 24.

principalement l'histoire des systèmes de signes numéraux. Ajoutons que, dans les chapitres précédents et dès les premiers, il y a bien des excursions sur des domaines qui ne touchent que de loin à cet objet principal. Les *Considérations finales* dans lesquelles nous allons suivre notre auteur, n'ont pas la prétention d'établir l'unité sévère de son ouvrage, mais plutôt d'en avouer et d'en excuser la marche un peu vagabonde: marche excusable, en effet, puisque l'auteur a su rencontrer sur son chemin tant de notions historiques d'un haut intérêt, et les communiquer à ses lecteurs.

Considérations finales. [1]

Dans les recherches principales sur les signes numéraux des peuples de l'antiquité et du moyen-âge, comme dans les recherches accessoires qu'il y a mêlées, M. Cantor s'est proposé un but général, qu'il exprime modestement la crainte de n'avoir pas atteint autant qu'il le désirait: « Je voulais, dit-il, faire voir, par des considérations tirées de l'histoire des mathématiques, quelle marche on doit attribuer à la culture intellectuelle et morale des peuples, et montrer que, pour arriver jusqu'à nous, la science mathématique a suivi la même route qui, d'après les traces d'autres porteurs de la civilisation, nous est indiquée comme ayant été suivie aussi par eux. » Cette conclusion, que je viens de traduire, est un peu vague, comme le titre de l'ouvrage. M. Cantor aurait mieux fait de la préciser en rappelant *quelle route* la science mathématique et surtout la numération écrite ont suivie dans leurs progrès.

Au lieu de nous présenter ce résumé naturel de son livre, M. Cantor se borne à rappeler, parmi les points traités, ceux qui, par leur nouveauté, lui paraissent dignes d'une attention spéciale, soit de la part des mathématiciens, soit de la part des autres lecteurs. C'est aux mathématiciens qu'il s'adresse d'abord (p. 355-356). Nous allons renverser cet ordre, afin d'obtenir une gradation ascendante d'intérêt.

M. Cantor me paraît se faire illusion, lorsqu'il attribue une haute importance et un caractère sévèrement historique à son roman de la vie de Pythagore (chapitres V, VI et VII), tel que M. Rœth le lui a inspiré, et je ne suis nullement touché de l'apologie qu'il en présente dans ses *Considérations finales* (p. 357-361).

Ensuite il renvoie (p. 362) les *lecteurs non mathématiciens* à l'étude des anciens temps de la Chine. Ils pourraient commencer cette étude, d'une manière aussi brève qu'utile, dans le mémoire d'Ideler sur la *Chronologie des Chinois*, et la compléter ensuite par la lecture des recherches d'Abel Rémusat, de M. Stanislas Julien et d'autres savants. Mais, s'ils abordaient sans précaution la lecture du Chapitre III de M. Cantor, à côté de quelques notions justes sur la langue et l'écriture de ce peuple, ils y trouveraient d'une part une erreur de fait sur l'antiquité des porcelaines chinoises découvertes en Egypte et en Babylonie, d'autre part les fausses conséquences que l'auteur en déduit et qu'il développe dans son chapitre VII.

Il rappelle (p. 361) qu'il a signalé (p. 33-38) la Babylonie comme un centre important de connaissances. Il a eu raison; mais M. Weber était arrivé avant lui à la même conclusion, en l'appuyant sur des faits plus nombreux et plus décisifs.

Les vues que M. Cantor (p. 361-362) emprunte à M. Oncken sur l'origine probablement babylonienne de la division sexagésimale, reposent sur des inductions vraisemblables. Mais nous avons vu que le fait de l'emploi perpetuel des fractions sexagésimales chez les Babyloniens est prouvé par des documents que M. Cantor aurait pu trouver dans l'ouvrage de M. Pihan.

Il y a beaucoup de vérité dans les considérations de M. Cantor (chapitres XIX-XXIII et p. 363) sur la persistance des études grecques et latines au moyen-âge, en ce qui concerne les mathématiques. Mais ce point, de même que le précédent, intéresse plus les *lecteurs mathématiciens* que les autres, auxquels M. Cantor s'adresse en ce moment.

1) *Schlussbetrachtungen*, p. 355-363.

Quant aux *lecteurs mathématiciens,* voici les points sur lesquels il réclame surtout leur attention (p. 356).

Dans son chapitre III, il croit avoir montré l'antiquité au moins possible du zéro chez les Chinois. J'ai dit, au contraire, que probablement le zéro a été introduit assez tard par l'influence indienne dans le système des *barres numérales* des Chinois, système analogue à la notation hiéroglyphique des nombres chez les Egyptiens.

Il renvoie avec confiance à ses chapitres VI et VII : on y trouve, sur l'origine des connaissances mathématiques de Pythagore, des conjectures dans lesquelles il donne beaucoup trop de place, d'une part à la légende sur les fonctions sacerdotales du philosophe grec en Egypte, sur son voyage à Babylone et sur ses relations prétendues avec Zoroastre, d'autre part à l'hypothèse fabuleuse des relations directes entre les anciens Babyloniens et les Chinois, et à une opinion peu juste envers le génie grec et beaucoup trop favorable à la science des Egyptiens et des Babyloniens. Mais il a le mérite d'avoir très bien montré le rapport qui existe entre le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse et les notions du même philosophe sur l'arithmétique et sur ses rapports avec la géométrie.

La comparaison que M. Cantor a établie (chapitre X, p. 150) entre la *méthode d'exhaustion* et la méthode d'Archimède pour exprimer verbalement de très grands nombres, n'ajoute pas autant qu'il semble le croire (p. 356) aux excellentes considérations de M. Chasles, que, du reste, il accepte complètement.

M. Cantor me paraît de même ajouter trop d'importance à sa négation absolue de l'existence du zéro chez les Grecs (chapitre VIII, p. 121-127). Entre cette négation, telle que M. Cantor l'explique lui-même, et l'affirmation de M. Wœpcke en faveur de l'existence de ce signe chez les Grecs avec une forme et une signification analogues, mais avec un usage différent, il y a une question de mot plutôt que de fait.

M. Cantor fait bien de rappeler l'explication qu'il a donnée (chapitre X, p. 148-154) sur le rapport entre la numération parlée des Grecs et les tranches de quatre chiffres d'Apollonius, de même qu'entre la numération parlée des Romains et nos tranches de trois chiffres.

Il a de même raison d'attacher de l'importance aux considérations nouvelles par lesquelles il a confirmé l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce en deux livres, et spécialement des passages sur les neuf signes pythagoriques si analogues à nos neuf chiffres modernes (chapitres XI-XVI, XIX, XX et XXII). Mais nous avons vu qu'il restait encore beaucoup à dire après lui en faveur de la même thèse, et sur la nature de l'œuvre de Boèce, dont le premier livre presque entier est une traduction d'un maigre extrait grec de la *Géométrie* d'Euclide.

Il a le mérite d'avoir prouvé (Chapitre XIII, p. 182-185 ; chapitre XV, p. 228-229, et chapitre XXI, p. 308) que Boèce avait écrit une *Astronomie*, et d'avoir montré que cet ouvrage était préparé par le morceau sur les fractions, mis par Boèce à la fin de sa *Géométrie*.

Enfin, il a fortifié (chapitres XXI et XXII) les preuves données avant lui de l'origine gréco-romaine et nullement arabe des connaissances mathématiques de Gerbert.

Je m'empresse d'ajouter que M. Cantor est loin d'avoir mentionné ici toutes les observations neuves et utiles que son livre renferme. Par exemple, il n'a pas rappelé le service qu'il a rendu en analysant (chapitre XX) le traité d'Odon de Cluny sur l'abacus. Seulement il aurait dû ajouter, comme je l'ai montré, qu'Odon, un demi siècle avant Gerbert, au lieu d'avoir sous les yeux les deux passages de la *Géométrie* de Boèce sur l'abacus, abrégeait un traité de l'abacus rédigé d'après les principes de Boèce, et qu'Odon prenait à tort ce traité pour une œuvre de savant contemporain de Théodoric.

Quant à l'histoire des chiffres et de leur usage, M. Cantor ne s'attribue guères que le mérite d'avoir réuni et disposé dans un ordre nouveau et plus lumineux des faits déjà connus. Sur quelques points, cet ordre m'a semblé laisser encore à désirer (voyez surtout la fin du chapitre Ier), et j'ai signalé des lacunes, dont quelques unes étaient faciles à combler, et dont d'autres méritaient la peine de s'en occuper. Mais, d'un autre côté, je trouve qu'ici M. Cantor ne se rend pas assez de justice à lui même. Car quelques points de ses recherches, qui viennent d'être rappelés, et d'autres qui auraient mérité de l'être,

contribuent à jeter un nouveau jour sur l'origine des figures des chiffres et du zéro et sur l'origine de leur valeur de position.

Sur ces deux questions liées entre elles, mais pourtant bien distinctes, M. Cantor a fait faire un pas à la science historique; M. Wœpcke en a fait faire un autre; profitant de leurs excellents travaux, j'ai essayé de faire un pas de plus, et d'ajouter le plus que j'ai pu aux notions contenues dans le livre que j'avais à analyser.

Je pourrais, à mon tour noter ici les points qui me paraissent les plus importants dans ce que j'ai ajouté. Mais j'aime mieux laisser ce soin aux lecteurs, et clore d'une manière plus utile ce travail plein de détails si multipliés, en formulant, et en développant, s'il en est besoin, les résultats généraux qui me paraissent en ressortir, pour ce qui concerne l'histoire de la numération écrite, objet principal du livre de M. Cantor, mais qui tient trop peu de place dans ses *Considération finales*. C'est là, dans son estimable travail, une dernière lacune, que je vais essayer de combler en partie.

L'ensemble des noms de nombre employés dans une langue, et la manière de combiner ces noms entre eux pour exprimer tous les nombres, impliquent un certain système de numération, qui est celui des peuples parlant cette langue 2).

Un peuple qui, dans son langage, serait réduit à exprimer les nombres par la répétition du mot signifiant *un*, serait bien misérable. Il faudrait plaindre, bien moins sans doute, mais beaucoup encore, un peuple qui, réduit à la fameuse *arithmétique binaire* de Leibniz, n'aurait de mots que pour 1 et 2 unités simples, mais aurait ensuite un luxe embarrassant de mots pour les puissances de 2, et serait condamné à exprimer longuement tous les nombres avec ces deux petits nombres d'unités et avec toutes ces puissances dont la sixième est très inférieure à la seconde puissance de 10. Il faudrait plaindre aussi un peuple qui aurait, au contraire, le luxe gênant de cent mots différents pour exprimer les cent premiers nombres d'unités, et qui, au dessus de ces unités simples si nombreuses, n'aurait d'autres noms de nombres que pour exprimer les puissances de 100, puissances trop rapidement croissantes, dont la troisième est déjà un million.

Portée jusqu'à ce point, l'exagération de ces deux défauts contraires est sans exemple connu 3). Mais des peuples nègres de l'Afrique occidentale sont réduits à une *arithmétique quinaire*. *L'arithmétique quaternaire* est signalée par Aristote chez des peuplades de la Thrace, et quelques vestiges à demi effacés semblent en indiquer l'existence primitive chez les Egyptiens, qui, en triplant la base de cette numération, seraient arrivés à une *arithmétique duodécimale*, avant de s'arrêter définitivement à l'arithmétique décimale, également éloignée des deux excès que nous venons d'indiquer 4).

Les peuples indo-européens ont un mot simple pour chacun des nombres depuis 1 jusqu'à 10, et ils ont aussi des mots simples, sinon pour toutes les puissances de 10, du moins pour quelques unes. Ces mots, combinés par addition et par multiplication, leur permettent d'exprimer clairement, facilement et brièvement un nombre quelconque. Si de plus, ils ont des mots particuliers pour les multiples de 10 par chacun des neuf premiers nombres, ce luxe inutile n'a du moins rien d'incommode. Le système de numération de ces peuples est donc essentiellement décimal, et des considérations étymologiques prouvent que le calcul sur les dix doigts des mains en est l'origine 5). Ce même système de numération est aujourd'hui celui de tous les peuples civilisés, quels que soient d'ailleurs leurs systèmes de mesures et de fractions. La numération décimale a toujours été celle de tous les peuples déjà arrivés à une certaine culture des sciences: elle a été, dès une haute antiquité, celle des Chinois, des Chaldéens, des Egyptiens, des Grecs et des Romains. Mais ce n'est que dans ces derniers temps, et par l'initiative de la France, que le système décimal de numération a introduit ses applications dans le système des mesures.

2) Voyez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, kap. III. — 3) Voyez M. Al. de Humboldt, *Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen systeme von Zahlzeichen* (dans le Journal de mathématiques de Crelle, t. 4, p. 205-231). — 4) Voyez ci-dessus, chapitre Ier. — 5) Voyez ci-dessus, chapitre II.

L'emploi systématique des fractions décimales a été inconnu dans l'antiquité : il s'est introduit au moyen-âge, lorsque l'arithmétique indienne avec le zéro a offert un moyen si commode de les exprimer par la valeur de position continuée audessous de l'unité. Les Egyptiens procédaient par fractions très-simples, qui toutes, excepté 2/3 et 5/6, avaient l'unité pour numérateur sous-entendu, et ils décomposaient en plusieurs fractions de cette espèce les fractions plus compliquées 6). Les Babyloniens ou Chaldéens procédaient par soixantièmes, en énonçant le numérateur variable et en sous-entendant le dénominateur invariable 7). Les savants grecs ont emprunté aux Chaldéens la division sexagésimale de l'unité, et aux Egyptiens la décomposition d'une fraction en plusieurs qui eussent toutes l'unité pour numérateur ; mais, de même que les Romains, ils employaient aussi des fractions à numérateurs et dénominateurs divers 8). Les fractions décimales paraissent nous être venues par les Arabes : le plus ancien auteur chez lequel on les ait signalées jusqu'à ce jour est le juif Jean de Séville, qui vivait chez les Maures d'Espagne au XIIe siècle 9).

Les idées des nombres, comme celles des autres objets de la pensée, s'expriment aux yeux par l'écriture. Avant de connaître les écritures *phonétiques*, qui représentent les mots et par eux les pensées correspondantes, l'espèce humaine a employé des écritures *idéographiques*, qui représentent directement les objet de la pensée, abstraction faite des mots, savoir : les objets visibles par une représentation grossière ou abrégée, et les objets invisibles par des représentations d'objets visibles pris pour symboles, ou par des signes arbitrairement choisis. En découvrant l'Amérique, les Européens y ont trouvé des peuples habitués à un système d'écriture qui peignait les objets. Les caractères de l'écriture chinoise sont idéographiques et paraissent avoir eu leur origine dans des peintures grossières et abrégées, dont les traits sont devenus méconnaissables. L'écriture égyptienne, autrefois purement idéographique, est devenue en partie phonétique. Le phonétisme est le caractère dominant des écritures des peuples sémitiques et indo-européens. Mais ces peuples ont deux manières d'exprimer les nombres aux yeux, savoir : phonétiquement en écrivant les noms de nombre, et idéographiquement par des signes indépendants des mots et de la diversité des langues.

Ces signes idéographiques des nombres, bien plus commodes que les mots dans les calculs, sont nommés *chiffres*, et il y en a de deux espèces, savoir : les *chiffres alphabétiques* ou *lettres numérales*, qui sont des lettres choisies chacune pour représenter un nombre, et les *chiffres proprement dits*, qui sont des signes spéciaux pris en dehors des alphabets.

Les peuples à écriture purement idéographique ont naturellement des chiffres proprement dits ; car, pour avoir des chiffres alphabétiques, il faudrait qu'ils les empruntassent à une écriture étrangère. Mais il leur est possible de peindre aux yeux les nombres, sans chiffres d'aucune espèce, par la répétition du signe idéographique de l'objet représenté. Cette représentation *concrète* est la manière la plus grossière d'écrire les nombres. Les Européens l'ont trouvée chez d'anciens peuples de l'Amérique 10).

Dans l'écriture hiéroglyphique des Egyptiens, le signe idéographique d'un objet se trouve répété trois fois ou neuf fois, non pas pour signifier trois ou neuf objets semblables, mais pour exprimer le pluriel sans désignation précise de nombre. Répété de même trois ou neuf fois dans cette écriture, le signe idéographique de *cent*, de *mille*, de *dix-mille*, de *cent mille* ou d'un *million* est employé quelquefois pour signifier vaguement *des centaines*, *des milliers*, *des myriades*, *des centaines de mille* ou *des millions* 11). Mais, dans cette même écriture, les nombres précis s'expriment d'une manière *abstraite* par des signes placés auprès du signe de l'objet qu'il s'agit de nombrer 12). L'unité est représentée par un trait verti-

6) Voyez ci-dessus, chapitre Ier et M. Pihan, p. 39-39. — 7) Voyez ci-dessus, chapitre II, et M. Pihan, p. 44. — 8) Voyez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, kap. IV, p. 112-115. M. Pihan et M. Cantor ont omis la notation grecque des fractions. — 9) Voyez ci-dessus, chapitre XVIII, fin. — 10) Voyez M. Al. de Humboldt, cité ci-dessus, note 3. — 11) Voyez M. Lepsius, *Ueber die Gotter der vier Elemente bei den Ægyptern*, p. 234-236 (Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 1856, in-4). — 12) Voyez ci-dessus, chapitre I.

cal, qu'on répète depuis deux jusqu'à neuf fois pour exprimer les nombres de 2 à 9. Mais ces traits, quand il y en a plus de quatre, sont distribués en groupes, dont chacun ne comprend jamais plus de *quatre* traits. Pour que cette combinaison représentât fidèlement une *arithmétique quaternaire*, il faudrait que dans l'expression d'un nombre ainsi figuré, il n'y eût jamais qu'un dernier groupe contenant moins de *quatre* traits. Il n'en est pas ainsi, puisque dans cette notation 5 se décompose en 3+2, 6 en 3+3, et 9 en 3+3+3. Mais le groupement par quatre, qui subsiste dans l'expression du nombre 7 décomposé en 4+3, et dans l'expression du nombre 8 décomposé en 4+4, avait peut être été primitivement en usage. D'autres particularités de la numération égyptienne semblent appuyer cette conjecture. Dans la langue égyptienne, 8 était le duel de 4. La vieille notation hiératique possède, pour les nombres ordinaux des jours du mois, un signe affecté à chacun des quatre premiers nombres; mais, pour exprimer les nombres de 5 à 8, elle juxtapose deux des quatre premiers signes. *Quatre* est le nombre des mois de chacune des trois saisons de l'année égyptienne: dans la désignation ordinale des mois de l'année, l'écriture hiéroglyphique ne dépasse jamais le nombre 4, exprimé par 4 traits verticaux, et elle indique la saison à laquelle le mois appartient. Cependant la langue égyptienne avait acquis une série de douze noms pour les *douze* mois de l'année. De même, dans la numération, le système *quaternaire*, en triplant sa base, avait pu produire un système *duodécimal*, dans lequel la *période quaternaire* ne marquait plus qu'une division, comme la *période quinaire*, dans le *système décimal* de quelques peuples. Quoi qu'il en soit de cette hypothèse sur l'existence antérieure d'une *arithmétique duodécimale* en Egypte, il est bien certain que l'*arithmétique décimale* a dominé dans ce pays dès une époque très reculée. La notation hiératique pour les nombres ordinaux des jours du mois n'a pas un signe particulier pour chacun des nombres 5, 6, 7 et 8; mais elle en a un pour 9, et la notation hiératique des nombres cardinaux a un signe particulier pour chacun des nombres de 1 à 9. En général, la notation numérale des Egyptiens, tant *hiéroglyphique* qu'*hiératique* et *démotique*, a une signe pour 10 et pour chacune des puissances de 10: elle exprime chacun des neuf nombres d'unités de chaque ordre décimal, soit par la répétition du signe simple, soit par un coëfficient ajouté à ce signe, soit par un signe unique et spécial pour ce nombre. La valeur décimale de position des chiffres est donc entièrement étrangère à tout ce système égyptien: la multiplication par les coëfficients y joue seule quelque rôle à côté de l'addition des valeurs des signes.

La prétendue *arithmétique binaire* des Chinois n'est qu'un rêve de Leibniz 13). Aussi haut qu'on peut remonter dans leur histoire, on trouve que leur numération tant parlée qu'écrite est purement décimale pour les nombres entiers. Ils ont deux systèmes principaux de notation numérale. L'un de ces systèmes présente plusieurs variétés, dont quelques unes sont très antiques: il a neuf chiffres pour les neuf premiers nombres et d'autres chiffres pour 10 et pour chacune des puissances de 10; il exprime les nombres de dizaines, de centaines, des milliers, etc., à l'aide des signes des nombres d'unités simples pris comme coëfficients. Il n'y a donc là nulle trace de valeur de position. L'autre système emploie des barres dont chacune représente une unité. Les barres se juxtaposent jusqu'à 5 inclusivement; mais, pour exprimer les nombres de 6 à 9 inclusivement, cinq barres sont remplacées par une seule posée autrement que les autres. Le système décimal ayant son origine dans le calcul sur les doigts des deux mains, il est naturel que la somme des cinq doigts d'une main puisse être considérée comme une unité d'un ordre intermédiaire. L'application de cette considération si naturelle se montre aussi dans les notations numérales non alphabétiques des Babyloniens, des Syriens et des Palmyréniens, dans la notation des Romains et dans une très ancienne méthode de notation numérale grecque par les initiales des noms de nombre 14). On retrouve l'application de cette même *période quinaire* subordonnée au *système décimal* dans les abacus à boules, à fiches et à jetons des Chinois, des Grecs et des Romains 15). Si ce système des *barres numérales* est antique en Chine, il a dû avoir autrefois des signes pour les

---

13) Voyez ci-dessus, chapitre III. — 14) Voyez ci-dessus, chapitre I, fin, et chapitres VIII, XI et XVII. — 15) Voyez ci-dessus, chapitre IX.

dixaines, les centaines et les milliers. Mais les plus anciens exemples que l'on cite de ce système ne sont pas antérieurs au VII[e] siècle de notre ère. Dans tous les exemples connus comme dans l'usage actuel des savants, auxquels l'emploi de ce système est réservé chez les Chinois, le zéro indien, avec la valeur de position, empruntée aussi aux Indiens, vient se joindre aux neuf groupes de barres numérales, qui suffisent ainsi à l'expression de tous les nombres. Mais il y a là certainement une importation étrangère.

La notation cunéiforme 16), employée en Assyrie, en Babylonie et en Perse, avait des signes simples pour l'unité, la dixaine et la centaine, et des signes complexes pour exprimer les puissances plus élevées de 10. Pour l'expression des nombres d'unités ou de dixaines jusqu'à 5, ce système procède par répétition du signe de l'unité ou de la dixaine, comme la notation hiéroglyphique des Egyptiens et comme le système chinois des barres numérales. Pour exprimer les nombres d'unités et de dixaines au-dessus de 5, le signe de l'unité plus grand signifie 5, quand il est placé à gauche d'unités simples, et 50 lorsqu'il est placé à gauche de dixaines. Les nombres de centaines, de milliers, etc., s'expriment par les signes des neuf premiers nombres, qui, mis à gauche, servent de coëfficients, tandisque, placés à droite, ils s'ajoutent au nombre total. La valeur de position décimale est étrangère à ce système.

Le système romain 17) pour la notation des nombres est probablement d'origine étrusque, comme les figures primitives des signes employés. Les principes de ce système ressemblent beaucoup à ceux du système cunéiforme, malgré la différence complète des figures. Dans le système romain, chacune des puissances de 10 a un signe. Jusqu'à 1000, ces signes sont simples; au-dessus de 1000, les signes sont complexes; mais le plus souvent on en évite l'emploi. Les nombres d'unités de chaque ordre décimal s'expriment par la répétition du signe de l'unité de cet ordre; mais 5 et ses multiples par les puissances de 10 ont aussi des signes spéciaux, dont les valeurs s'additionnent avec les unités du même ordre. De plus, le signe de l'unité, de la dixaine ou de la centaine, placé à gauche d'un signe simple de valeur supérieure au-dessous de 1000, s'emploie par soustraction. A gauche du signe de 1000, les signes inférieurs servent de multiplicateurs, et permettent d'éviter l'emploi des signes complexes pour les puissances de 10 supérieures à 1000. Le signe de 1000 lui-même peut être remplacé par un trait horizontal au-dessus des signes qui expriment le nombre de milliers, et par le point marquant la séparation des signes numéraux en deux tranches. Quand il y a deux ou plusieurs tranches ainsi séparées, l'unité de la tranche à gauche vaut 1000 fois ou 100 fois l'unité de la tranche à droite, suivant que celle-ci a des centaines ou qu'elle n'en a pas. Si les Romains s'étaient avisés de donner à leurs tranches une valeur de position *décuple seulement*, de réduire au *maximum* de 9 le nombre des unités exprimées par chaque tranche, et d'inventer un zéro pour marquer la place des tranches nulles, ils seraient arrivés à un système équivalent en principe à notre système actuel venu de l'Inde, mais analogue au système des barres numérales chinoises par la complication de l'expression de chacun des neuf nombres d'unités simples. Mais les Romains n'ont pas conçu la pensée de cette heureuse innovation. Ils reçurent tardivement des néopythagoriciens grecs un système à peu près équivalent à celui-là pour les calculs, mais qui, n'ayant pas le zéro, ne pouvait s'appliquer que sur un tableau à colonnes préparé d'avance.

La notation cunéiforme des nombres a appartenu d'une part à des peuples de race scythique ou touranienne fixés dans l'empire des Perses, d'autre part aux Perses eux-mêmes, peuple de la famille indo-européenne, et enfin aux populations sémitiques de l'Assyrie et de la Babylonie. Mais, outre l'écriture cunéiforme employée dans leurs inscriptions, ces dernières avaient peut-être, pour les usages ordinaires de la vie, une écriture alphabétique et une notation par lettres numérales 18). Quant aux populations sémitiques de l'Asie occidentale 19), il est certain que les Syriens, les Palmyréniens et les Phéniciens ont eu concurremment deux systèmes de notation des nombres, l'un non alphabétique et plus

16) Voyez ci-dessus, chapitre II. — 17) Voyez ci-dessus, chapitre XI. — 18) Voyez ci-dessus, chapitre II. — 19) Voyez ci-dessus, chapitre I, fin, et chapitre XVII.

ou moins analogue au système hiéroglyphique des Egyptiens et au système cunéiforme par le principe de répétition du signe de l'unité, l'autre alphabétique et offrant une lettre pour chaque nombre d'unités et de dizaines. Ce dernier système parait avoir existé seul chez les Hébreux.

Très anciennement, les Grecs 20) avaient une notation numérale analogue à celle des Romains par ses procédés, quoique très différent par ses figures. Dans cette vieille notation grecque, les nombres 1, 5, 10, 100, 1000 et 10000 étaient désignés chacun par la lettre initiale majuscule du nom grec de chacun de ces nombres; les nombres d'unités de chaque ordre décimal s'exprimaient par la répétition de la lettre numérale jusqu'au nombre 4 inclusivement; le Π enveloppant la lettre numérale servait de coëfficient pour exprimer cinq unités de chaque ordre, et l'on pouvait exprimer ainsi un nombre quelconque jusqu'à 100000 exclusivement. Mais un système de chiffres alphabétiques, établi à l'imitation de celui des Phéniciens et complété par trois caractères ajoutés aux 24 de l'alphabet ionien, fut le système prédominant chez les Grecs. Il offrait un signe pour chacun des neuf nombres d'unités, de dizaines et de centaines, et les neuf premiers signes, avec une virgule à gauche exprimaient les neuf nombres de milliers. Quelquefois les 18 signes suivants, avec la virgule à gauche, exprimaient les neuf nombres de dizaines de mille et les neuf nombres de centaines de mille, de sorte qu'on allait ainsi jusqu'au million exclusivement. Mais, plus habituellement, la myriade, prise comme multiplicande, servait d'unité nouvelle, et on l'exprimait soit en toutes lettres, soit par une initiale, soit simplement par un point, qui séparait les lettres numérales placées à gauche et exprimant le nombre de myriades, des lettres numérales placées à droite et exprimant le nombre d'unités simples; une seconde tranche à gauche pouvait être séparée de même, pour exprimer les myriades de myriades, et ainsi de suite. Ce système grec des tranches, formulé par Apollonius, est bien plus régulier que le système romain. Quant à l'invention d'Archimède, qui consistait à doubler le nombre des ordres décimaux de chaque tranche, elle n'avait nullement pour objet de fournir aux calculateurs grecs un système de notation plus commode, mais bien de donner à la langue grecque un moyen d'exprimer avec précision des nombres énormes, et de prouver ainsi que ces nombres ne sont ni infinis, ni indéfinis. Pour arriver à notre système actuel, le plus commode pour les calculs, bien loin de doubler chacune de leurs tranches de quatre ordres décimaux, les Grecs auraient dû réduire chaque tranche à un seul ordre décimal, faire jouer ainsi à la décade le rôle qu'ils donnaient à la myriade pour la valeur de position, et inventer un signe pour marquer les ordres vides. Mais les Grecs n'eurent pas eu plus que les Romains la pensée de cette simplification de leurs tranches numérales.

C'est aux Indiens qu'appartient l'honneur d'avoir inventé notre système moderne de numération en chiffres, c'est-à-dire l'application parfaite de la valeur décimale de position avec neuf chiffres et le zéro 21). Très inférieurs aux Grecs pour le génie d'observation et d'induction et pour la rigueur du raisonnement déductif, ils avaient au plus haut degré l'imagination inventive dans le domaine des spéculations arithmétiques ou métaphysiques, et une mémoire étonnante, développée par des exercices persévérants. A peine avaient-ils une écriture, que déjà ils imaginaient, comparaient et exprimaient par la parole des nombres prodigieux. Des Indiens contemporains d'Archimède le devançaient dans cet art. Ils avaient sans doute dès lors les vieux chiffres couchites pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9 et pour d'autres nombres; mais ces chiffres avaient dû s'offrir à eux sans valeur de position, comme ils étaient employés aussi en Egypte. Jusqu'à l'invention du zéro, les Indiens durent les employer de même. Mais probablement ils calculaient avec des boules auxquelles ils pouvaient donner des valeurs décimales de position. Peut-être l'invention du système des neuf chiffres et du zéro fut-elle précédée et préparée chez eux par l'emploi de mots symboliques représentant les neuf premiers nombres et entrant dans des vers mnémoniques où ils leur donnaient des valeurs décimales de position, en marquant aussi par des mots symboliques les places des

---

20) Voyez ci-dessus, chapitre VIII. — 21) Voyez ci-dessus, chapitre IV.

ordres décimaux laissés vides dans les nombres ainsi exprimés. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'au moins à partir du Ve siècle de notre ère, l'usage de cette numération mnémonique par mots symboliques mis en vers et doués d'une valeur décimale de position, a coëxisté dans l'Inde avec l'emploi des neuf chiffres et du zéro dans un système de notation semblable au nôtre, comme aussi avec l'emploi persistant d'autres systèmes de chiffres, de lettres numérales et de mots symboliques, auxquels la valeur décimale de position était étrangère.

Il n'est pas moins certain 22) que vers l'an 800 la valeur de position, les neuf chiffres et le zéro ont été enseignés par les Indiens aux Arabes orientaux, que ceux-ci ont transmis cette connaissance aux Grecs byzantins à une époque inconnue, mais certainement avant le XIVe siècle, et que, vers le commencement du XIIe siècle, les Arabes occidentaux l'ont transmise aussi aux populations chrétiennes de l'Occident. Mais, chez ces dernières, une autre invention, provisoirement utile, avait précédé de sept siècles l'introduction de la méthode indo-arabe : cette invention est celle de l'*abacus* des néopythagoriciens. Quelques considérations sont nécessaires pour en expliquer l'importance historique.

L'utilité des chiffres ne consiste pas seulement à exprimer les nombres aux yeux d'une manière brève et claire, mais encore à en fixer les éléments d'une manière nette et bien distincte, pour la commodité des calculs. Cependant les opérations arithmétiques peuvent s'effectuer sans chiffres.

Par exemple, on peut, très difficilement, il est vrai, opérer de mémoire sur les nombres exprimés par les mots dans un certain système de numération, puisque cette numération parlée distingue les éléments de chaque nombre total, comme des chiffres pourraient le faire.

Les opérations arithmétiques peuvent aussi s'effectuer, moins difficilement, en écrivant les noms de nombre en toutes lettres ou en abrégé, et en opérant sur eux comme on opérerait sur les chiffres. Longtemps après avoir connu la notation indienne, des mathématiciens arabes ont persisté à opérer ainsi dans des traités d'arithmétique où il n'y a pas un seul signe numéral, et où les nombres entrent dans les calculs, tel que la langue les fournit, c'est-à-dire sans que leurs éléments aient une valeur de position 23).

D'un autre côté, on peut, très lentement, il est vrai, mais très facilement et d'une manière indépendante de tout système particulier de numération parlée ou figurée, faire les opérations arithmétiques avec des boules que l'on compte. Par exemple, on peut mettre une boule dans un vase, chaque fois que l'on retranche un nombre de boules *diviseur* d'un nombre de boules *dividende ;* quand l'opération cesse d'être possible, il n'y a plus qu'à compter les boules du *quotient* et celles du *reste*, s'il y en a.

Mais les mêmes opérations s'effectuent d'une manière plus commode, plus prompte et plus intelligente, en rangeant les boules ou les jetons suivant une série de colonnes douées de valeurs décimales de position, afin d'avoir beaucoup moins de boules ou jetons à compter. Tel est le principe du *suan-pan* chinois à boules enfilées ; tel était le principe de l'*abacus* primitif des Grecs et des Romains 24). Il y avait des *abacus* où les colonnes étaient marquées par des rainures ; il y en avait où elles étaient marquées par des lignes tracées sur du sable fin.

Un progrès important consista à remplacer chaque nombre de jetons dans chaque colonne de l'abacus par une seule pièce mobile portant ce même nombre écrit, ou bien par ce même nombre tracé directement en signes numéraux quelconques dans les colonnes de l'abacus. Des néopythagoriciens alexandrins, auteurs de cette invention tardive, y imprimèrent le cachet de leur secte et du pays qu'ils habitaient : au lieu de prendre les caractères grecs qui exprimaient les neuf premiers nombres, ils choisirent neuf figures adaptées à leurs interprétations symboliques, qu'ils exprimèrent aussi par des noms grecs mystérieux donnés aux neuf nombres 25).

En Grèce, cette invention des néopythagoriciens paraît s'être peu répandue, et il ne faut pas trop s'en étonner. En effet, pour le calcul avec des jetons, la valeur de position dans les colonnes de l'abacus

22) Voyez ci-dessus, chapitre XVII.— 23) Voyez ci-dessus, chapitre XVII.— 24) Voyez ci-dessus, chapitres IX, X, XIII, XIV, XV et XVI. — 25) Voyez ci-dessus, chapitre XVI.

était d'une utilité évidente, puisque, par exemple, cinq jetons dans la troisième colonne étaient plus vite comptés que 500 jetons, qu'ils remplaçaient. Mais, quand, au lieu de jetons dont chacun représentait une unité, on employait en dehors de l'abacus les lettres numérales grecques, dont chacune représentait un nombre, ces lettres, sans valeur de position, semblaient laisser peu à désirer pour la facilité des calculs 26). En effet, dans ce système grec, chaque nombre d'unités de chaque ordre décimal était représenté par une seule lettre, comme il l'était par un seul chiffre dans le système des néopythagoriciens. Il est vrai que dans celui-ci un même nombre d'unités était toujours représenté par un même chiffre, quel que fût l'ordre décimal de ces unités, tandisque pour un même nombre d'unités la lettre numérale changeait suivant l'ordre décimal. Par conséquent, pour multiplier par 10 ou par une puissance de 10 un nombre exprimé en lettres numérales grecques, il fallait changer toutes les lettres, tandisqu'il suffisait de reculer d'une ou de plusieurs colonnes vers la gauche de l'abacus tous les chiffres pythagoriques, sans en changer un seul. Il est encore vrai que dans les opérations partielles chaque lettre grecque entrait avec toute sa valeur numérale, tandisque chaque chiffre pythagorique n'y entrait qu'avec sa valeur simple, inférieure à 10, sans sa valeur de position. Mais il ne faut pas s'exagérer cet avantage; car, par exemple, dans la multiplication de 975 par 36, la multiplication partielle de 900 par 30 n'est pas beaucoup plus difficile que celle de 9 par 3. D'ailleurs, les avantages réels du système nouveau étaient compensés par l'inconvénient non moins réel d'avoir perpétuellement besoin de l'abacus, dont on se passait parfaitement avec les lettres numérales grecques. Si le système indien avec le zéro s'était présenté aux Grecs au lieu de l'abacus pythagorique, ils l'auraient bien vite adopté.

Les Romains, et les peuples de l'Occident, pliés aux habitudes romaines, n'avaient pas les mêmes motifs de dédaigner l'invention des néopythagoriciens. Car la notation numérale romaine, très inférieure aux système des lettres numérales grecques pour l'expression claire, et simple des nombres, l'était bien plus encore pour la commodité des calculs 27). Les seuls nombres d'unités, de dixaines et de centaines qu'elle exprimât chacun par un seul signe étaient 1 et 5: pour exprimer chacun des sept autres nombres d'unités de ces différents ordres décimaux, il fallait réunir deux, trois, quatre ou cinq signes. Outre ses autres avantages, le système nouveau avait pour ces peuples celui de les dispenser de faire entrer dans les calculs ce lourd bagage des signes incommodes, ou bien, s'ils voulaient le conserver, de le rendre plus simple, plus maniable et plus clair, en le réduisant aux sept groupes de signes qui, avec les signes de 1 et de 5, exprimaient les neuf premiers nombres, et en isolant chacun de ces groupes dans les colonnes de l'abacus. On conçoit donc que, pour les calculs, le système de l'abacus pythagorique, avec ou sans les figures des neuf chiffres, ait prévalu en Occident, jusqu'au jour où il dut disparaître devant le système indien transmis par les Arabes, système dont l'avantage considérable dû à l'usage du zéro, est de permettre non-seulement d'exprimer tous les nombres, mais d'exécuter facilement et clairement tous les calculs, sans avoir besoin d'un tableau à colonne tracé d'avance.

Ainsi la valeur décimale de position, pour les boules ou jetons employés dans les calculs, a été connue de beaucoup de peuples anciens, et notamment des Grecs et des Romains. Une secte grecque a inventé tardivement l'application de cette valeur de position à un système de neuf chiffres; mais avec la nécessité d'un appareil gênant. Les Indiens ont inventé de leur côté la valeur de position des chiffres; mais, au lieu de 9 seulement, ils ont eu l'heureuse pensée d'en prendre de plus un dixième, pour conserver aux autres leurs rangs en marquant les places vides. C'est ainsi qu'ils ont rendu commode l'application de la valeur de position. Employé d'abord par eux et ensuite par les Arabes à des usages assez restreints ce système domine aujourd'hui à juste titre chez tous les peuples civilisés.

---

26) Comparez M. Chasles, *Sur le passage du premier livre de la Géométrie de Boèce relatif à un nouveau système de numération* (Bruxelles, 1836, in-4), et M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, kap. IV, *Die Logistik der Griechen*. — 27) Voyez ci-dessus, chapitre XI.

Longtemps l'origine et l'histoire de ce système ont été mal comprises, parcequ'on s'est imaginé qu'elles devaient être identiques avec l'origine et l'histoire des figures des neuf chiffres. C'est ainsi qu'on a voulu refuser aux Grecs et aux Romains antérieurs à l'islamisme le système de l'abacus avec valeur de position des chiffres pour le faire venir de l'Inde par les Arabes 28). C'est ainsi que, par une erreur contraire, on a été tenté d'attribuer aux Grecs et aux Romains, avec l'abacus et les neuf chiffres, l'usage indien du zéro, qui est venu rendre l'abacus inutile 29).

Ces deux erreurs pourraient chercher un appui ou un prétexte dans une difficulté que j'ai essayé de résoudre 30). Si le système gréco-romain de l'abacus avec neuf chiffres seulement et le système indo-arabe des neuf chiffres et du zéro sans abacus, n'ont pas la même origine, comment se fait-il qu'entre les neuf chiffres indiens et les neuf chiffres gréco-romains il y ait des ressemblances trop grandes pour être dues au hasard? Ces chiffres seraient-ils donc une invention grecque transmise à l'Inde, ou bien une invention indienne transmise à la Grèce? Non, puisque, dès une époque où les Grecs n'avaient certainement pas ces neuf chiffres, et où les Indiens n'étaient pas même encore arrivés sur le sol de l'Inde, cinq de ces chiffres, parfaitement reconnaissables, ceux des nombres 1, 2, 3, 4 et 9, existaient dans la notation égyptienne des jours de mois, qui n'avait que cinq chiffres pour les nombres audessous de 10. Nous savons que ces cinq chiffres ont été empruntés à l'Egypte par des néopythagoriciens d'Alexandrie, qui leur ont adjoint quatre autres chiffres pour le nombres 5, 6, 7 et 8, et qu'ils ont été introduits chez les Romains par un néopythagoricien grec écrivant en latin, et après lui par Boèce. Mais comment ces cinq chiffres égyptiens ont-ils passé dans l'Inde? Ce n'est pas par l'intermédiaire des Grecs, puisque les quatre autres chiffres des néopythagoriciens pour les nombres 5, 6, 7 et 8 diffèrent entièrement des chiffres indiens correspondants, à quelque époque qu'on les prenne. Il faut donc, ou que les Indiens aient emprunté directement les cinq chiffres à l'Egypte, ou que les Egyptiens et les Indiens les aient tirés d'une même source. De ces deux hypothèses, je ne dis pas que la première soit absolument impossible; car, dès l'époque des Ptolémées, mais surtout depuis l'époque d'Auguste 31), beaucoup de bâtiments de commerce allaient de l'Egypte dans l'Inde; l'île de Socotora était peuplée d'Egyptiens, de Grecs et d'Indiens 32), et au Ve siècle non-seulement des commerçants indiens, mais des bracmanes, venaient en Egypte 33). Mais la seconde hypothèse me paraît plus vraisemblable. Car ces cinq chiffres peuvent avoir appartenu aux populations couchites répandues autrefois depuis l'Egypte et l'Ethiopie jusqu'aux bouches du Gange; ils ont pu être adoptés par les Egyptiens dès la plus haute antiquité; ils ont pu se conserver dans l'Inde chez les populations couchites, auxquelles les Indiens Aryas les auraient empruntés 34). Quoi qu'il en soit, il faut choisir entre ces deux hypothèses, et celle qui fait venir de l'Inde les neuf chiffres pythagoriques doit être rejetée.

Les Arabes musulmans acceptèrent d'abord les notations numérales alphabétiques des peuples conquis. Puis ils employèrent de même les lettres de leurs divers alphabets arabes, toujours sans valeur de position, et ce mode de notation est resté chez eux dominant, à côté de la méthode bien plus incommode, qu'ils ont conservée aussi, de faire entrer dans les calculs les noms de nombre eux-mêmes écrits en toutes lettres. Cependant, vers le commencement du IXe siècle, les Arabes orientaux s'étaient approprié le système indien avec les neuf chiffres, le zéro et la valeur de position. De leur côté, les Arabes occidentaux connurent de bonne heure sans doute l'abacus pythagorique propagé en Occident par Boèce. Plus tard vers le Xe siècle, le système indien leur fut transmis par les Arabes orientaux; mais, en l'acceptant, ils gardèrent les neuf chiffres pythagoriques, dont quatre différaient des chiffres indiens correspondants,

---

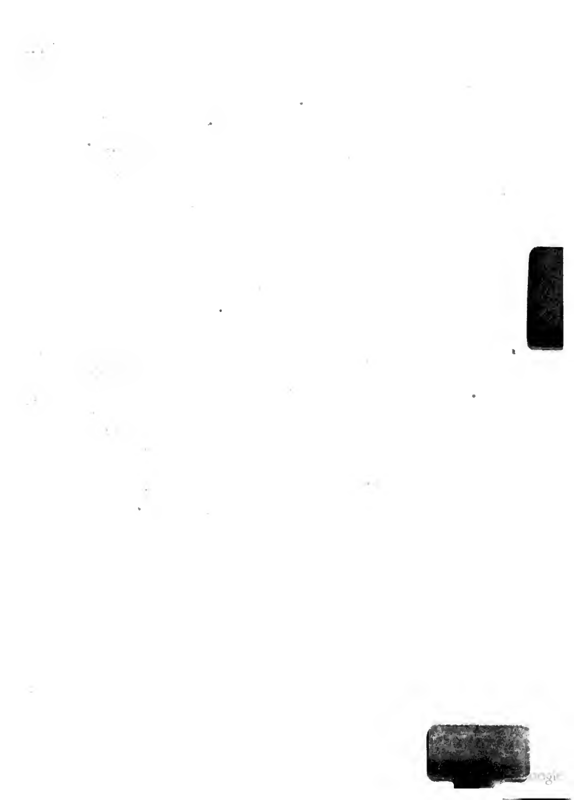
28) Voyez la discussion obstinée de M. Libri contre M. Chasles, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 7 et 14 octobre 1839. — 29) Voyez Niebuhr et Playfair, cités ci-dessus, chapitre VIII. — 30) Voyez ci-dessus, chapitres XVI et XVII. — 31) Voyez Strabon, II, 5, § 9 et 12, et XV, 1, § 4, p. 116, 118 et 686 (éd. Casaubon); le *Périple de la mer Erythrée*, p. 174) (éd. Blancanus); Pline, VI, 26, t. 1, p. 410 (éd. Sillig.), et Ammien Marcellin, XXII, 7. — 32) Voyez le *Périple de la mer Erythrée*, p. 159. éd. Blancanus), et Cosmas, *Topographie chrétienne*, p. 178 (éd. Montfaucon). — 33) Voyez Damascius, vie d'Isidore, dans Photius, *Biblioth.* cod. 242, p. 340 (éd. Bekker). — 34) Voyez ci-dessus, chapitre XVII.

et qui avaient aussi pénétré un peu chez les Arabes orientaux. Légèrement modifiés par les Arabes, ces neuf chiffres pythagoriques, dont cinq seulement ressemblaient beaucoup aux chiffres indiens, prirent le nom de chiffres *gobâr*, et les Arabes les employèrent comme ils employaient les chiffres indiens, c'est-à-dire tantôt avec le zéro mis dans les places vides, à la manière indienne, qui est aussi la nôtre, tantôt en marquant l'ordre décimal de chaque chiffre par des zéros ou des points placés au-dessus 35).

Jusqu'à la fin du XI[e] siècle, les peuples chrétiens de l'Occident avaient conservé l'usage de l'abacus de Boèce 36). Mais, à partir du commencement du XII[e] siècle, ils l'abandonnèrent peu à peu, pour adopter le système indien transmis par les Arabes 37). Cependant, en leur empruntant le zéro sous sa forme la plus ancienne, ils gardèrent les neuf chiffres pythagoriques, qui, un peu modifiés sous l'influence de l'imitation des chiffres *gobâr* occidentaux, devinrent nos chiffres modernes, chiffres égypto-alexandrins par leur origine et liés primitivement au système gréco-romain de l'abacus, mais joints plus tard au zéro indien, et adaptés ainsi au système indo-arabe, qui est la méthode de notation numérale la plus parfaite.

35) Voyez ci-dessus, chapitres XVII et XVIII. — 36) Voyez ci-dessus, chapitres XIX-XXIII. — 37) Voyez ci-dessus, chapitres XXIII et XXIV.






BIBLIOTECA